# CORRIGE DU SUJET 9

## CORRIGE DE L'EXERCICE 1

### 1- Calcul des efforts axiaux et des déformations :

a) Barres en séries :

L'efforts normal est le même dans les deux tronçons

$N + 75 = 0$

$\Rightarrow N = -75$ KN

Les déformations dans chaque tronçon sont :

$$\Delta L_1 = \frac{NL_1}{E_1A_1} = \frac{75 \times 1000}{200 \times 2400} = 0.16\text{mm}$$

$$\Delta L_2 = \frac{NL_2}{E_2A_2} = \frac{75 \times 2000}{120 \times 3500} = 0.36 \text{ mm}$$

b) Barres en parallèles :

$N_1 + N_2 + 75 = 0$

Les deux barres subissent la même déformation

$\Delta L_1 = \Delta L_2$ **(1)**

$\frac{N_1L_1}{E_1A_1} = \frac{N_2L_2}{E_2A_2}$ **(2)**

De (1) et (2) on obtient :

N1 = 22.83 KN

N2 = 52.17 KN

D'où

$$\Delta L_1 = \Delta L_2 = \frac{52.17 \times 2000}{120 \times 3500} = 0.25\text{mm}$$

La rigidité équivalente de n barres en série :

La déformation totale est égale à la somme des déformations de chaque barre :

$$\Delta L = \sum \Delta L_i \Rightarrow \Delta L = \sum \frac{N_i L_i}{E_i A_i}$$

L'effort normal étant le même dans toutes les barres, il vient donc :

$$\Delta L = N \sum \frac{L_i}{E_i A_i}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta L}{N} = \frac{1}{K_{eq}} = \sum \frac{1}{K_i}$$

La rigidité équivalente de n barres en parallèle :

L'effort normal est la somme de tous les efforts axiaux dans le n barres :

$$N = \sum N_i = \sum \frac{E_i A_i}{L_i} \Delta L_i$$

Comme $\Delta L = \Delta L_1 = \Delta L_2 = \ldots = \Delta L_n$

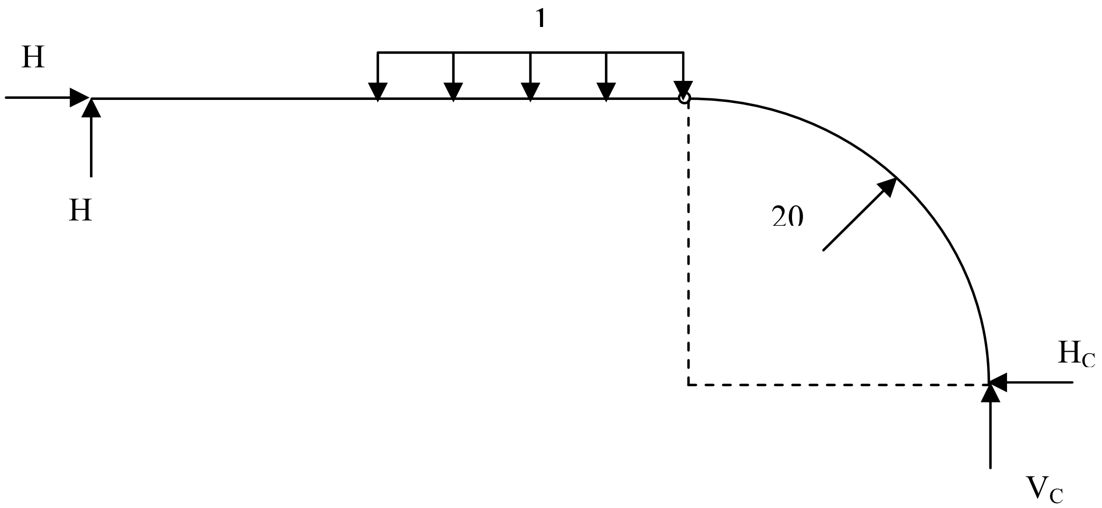
$$\Rightarrow N = \Delta L \sum \frac{E_i A_i}{L_i}$$

On obtient ainsi la rigidité équivalente comme suit :

$$\frac{N}{\Delta L} = K_{eq} = \sum K_i$$

**CORRIGE DE L'EXERCICE 2**

Le schéma statique du portique est le suivant :



**Calcul des réactions :**

$\sum F \uparrow = 0$

$\Rightarrow$ VA + VC = 1 – 40 cos 45 = - 27.28 (1)

$\sum F \rightarrow = 0$

$\Rightarrow$ HA – HC + 40 cos 45 = 0 (2)

$\sum M_{/\,\mathrm{Bgauche}} = 0$

$\Rightarrow 2V_A - 1 \times 0.5 = 0 \Rightarrow V_A = 0.25$ KN (3)

$\sum M_{/\,\mathrm{Bdroite}} = 0$

$\Rightarrow V_C + 40 \times 1 \times \cos 45 - H_C = 0$ (4)

de (1) $V_C = -27.53$ KN

de (4) $H_C = 0.75$ KN

de (2) $H_A = -27.53$ KN

**Les diagrammes des efforts internes :**

**Tronçon AD $0 \leq x \leq 1$**

N = 27.53 KN

T = - 0.25 KN

M = 0.25 x ; M(0) = 0, M(1) = 0.25 KN.m

**Tronçon BD : $0 \leq x \leq 1$**

N = 27.53 KN

T = - 0.25 + x ; T(0) = -0.25 KN ; T(1) = +0.75 KN

$M = 0.25\,(x+1) - 0.5\,x^2$ ; M(0) = 0.25 KN.m ; M(1) = 0 KN.m

**Tronçon CE: $0 \leq \theta \leq \pi/2$**

$N = 27.53 \cos\theta - 0.75 \sin\theta$ ; N(0) = 18.94 KN ; $N(\pi/2) = 27.53$ KN

$T = 0.75 \cos\theta + 27.53 \sin\theta$ ; T(0) = 0.75 KN ; $T(\pi/2) = +20$ KN

$M = -27.53\,(1-\cos\theta) - 0.75 \sin\theta$ ; M(0) = 0 ; $M(\pi/2) = -8.59$ KN.m

**Tronçon BE : $0 \leq \theta \leq \pi/2$**

$N = 27.53\cos(\pi/2+\theta) - 0.75\sin(\pi/2+\theta) + 40\sin\theta$ ; $N(0) = 18.94$ KN ; $N(\pi/2) = 27.53$ KN

$T = 0.75\cos(\pi/2+\theta) + 27.53\sin(\pi/2+\theta) - 40\cos\theta$ ; $T(0) = -20$ KN ; $T(\pi/2) = -0.75$ KN

$M = -27.53\,[1 - \cos(\pi/2+\theta)] - 0.75\sin(\theta+\pi/2) + 40\sin\theta$ ; $M(0) = -8.59$ KN.m ; $M(0) = 0$

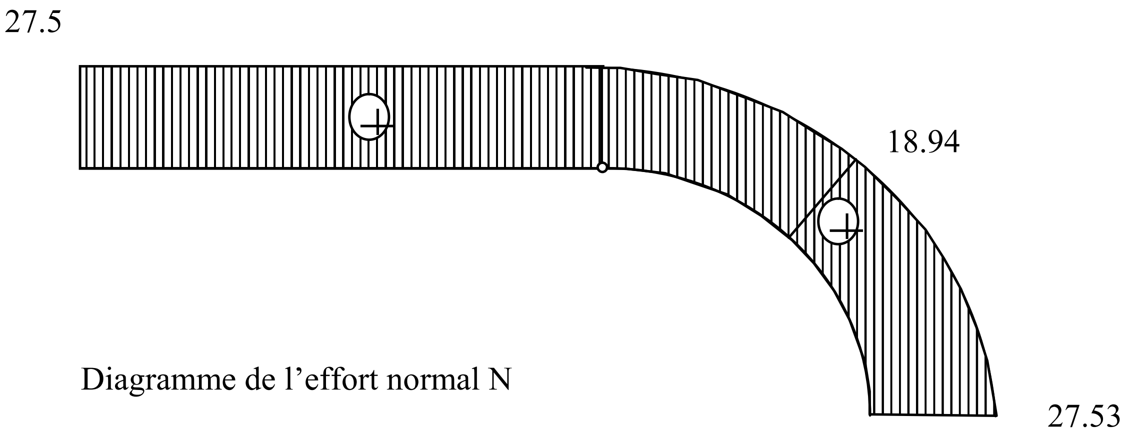



Diagramme de l'effort normal N

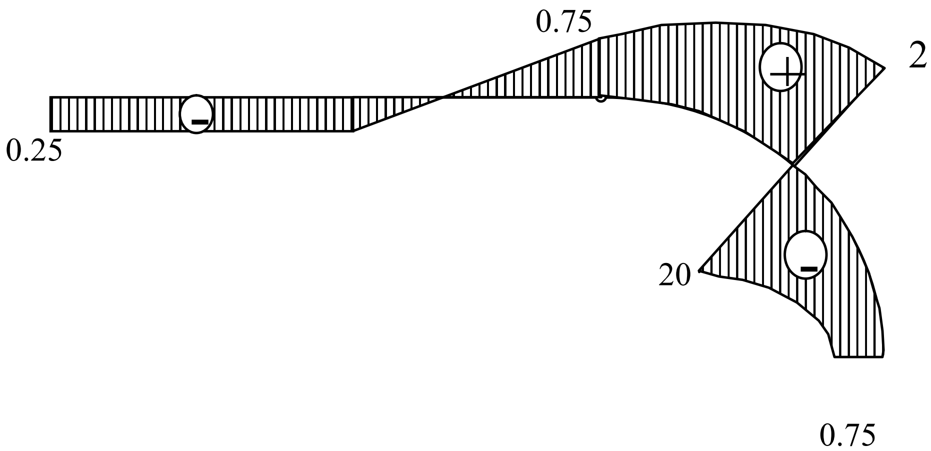



Diagramme de l'effort tranchant T

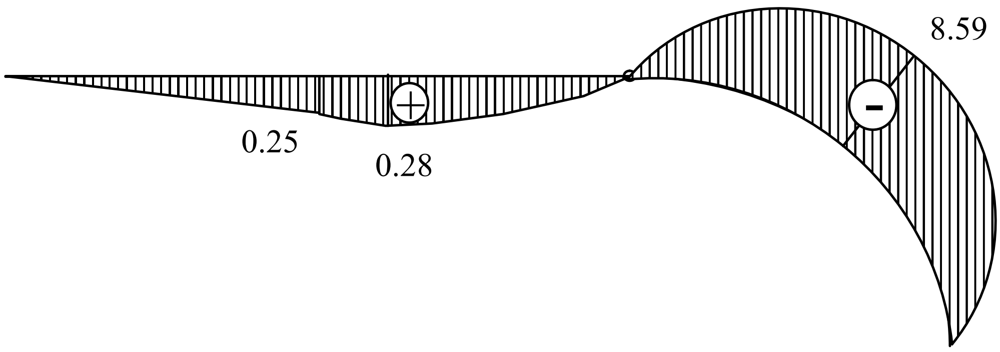
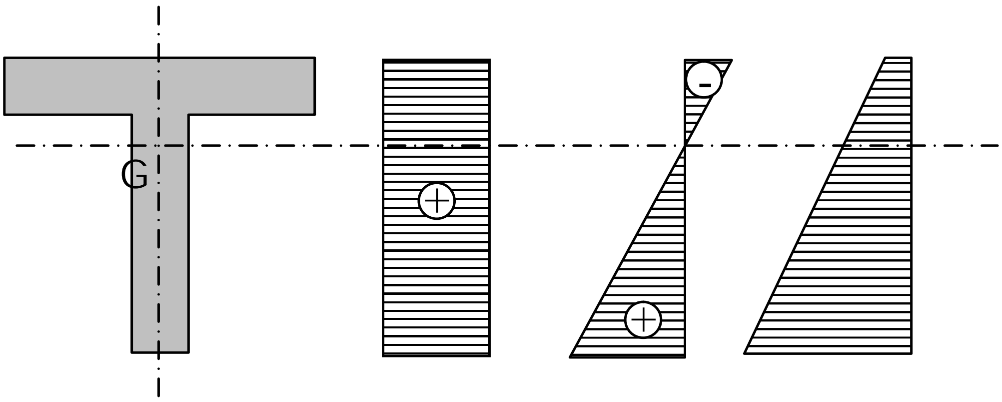



Diagramme du moment fléchissant M

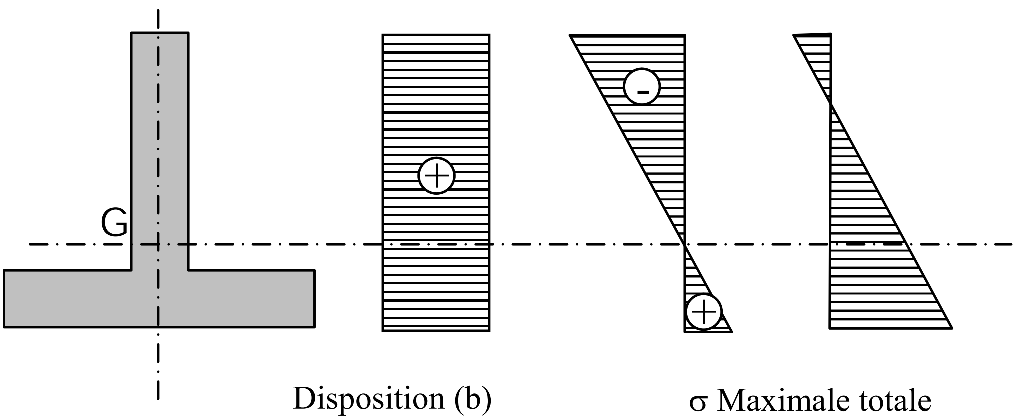
La section dangereuse dans le tronçon AB correspond aux efforts suivants :

$M_{max}$ = 0.28 kN.m  et N = 27.53 kN (cas d'une flexion composée)

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} \pm \frac{Ny_{\max}}{I}$$




Disposition (a) σ Maximale totale




Disposition (b) σ Maximale totale

La disposition rationnelle est celle qui minimise la contrainte maximale total.

Sachant que la contrainte normale provenant de l'effort normal est une traction (positive) donc la disposition (b) est meilleure car la contrainte maximale totale dans ce cas est égale à la somme de deux contraintes de signe opposé (allégement).

Dans ce cas

Les caractéristiques géométriques sont :

Les coordonnées du centre de gravité G :

$$y_G = \frac{60\times5\times30+2\times10\times5\times2.5}{60\times5+5\times20} = 23.125 \text{ mm}$$

$$\Rightarrow y_{max} = 60 - 23.125 = 36.875 \text{ mm}$$

Le moment d'inertie $I_{xx}$

$$I_{xx} = \frac{5\times(60)^3}{12} + 2\times\frac{10\times(5)^3}{12} = 90208 \text{ mm}^4$$

La contrainte normale maximale de traction est :

$$\Rightarrow \sigma_{+max} = \frac{27.53\times10^3}{400} + \frac{0.28\times10^5\times23.125}{90208} = +76 \text{ N/mm}^2$$

La contrainte normale maximale de compression est :

$$\Rightarrow \sigma_{-max} = \frac{27.53\times10^3}{400} - \frac{0.28\times10^5\times36.875}{90208} = -57.38 \text{ N/mm}^2$$

**Tronçon BC**

Section rectangulaire :

$h = 2.5\ b \Rightarrow A = h\ .\ b = 2.5\ b^2$

$$I = \frac{b\times h^3}{12} = \frac{(2.5)^3}{12}b^4 = 1.302b^4$$

Les efforts au niveau de la section dangereuse :

$M_{max} = 8.59$ KN.m

$N = 18.94$ KN

La contrainte normale maximale :

$$\Rightarrow \left|\sigma_{max}\right| = \frac{18.94\times10^3}{2.5b^2} - \frac{8.59\times10^5\times1.25b}{1.3b^4} \leq 130$$

$\Rightarrow 130\ b3 - 7576b - 825961 = 0 \qquad \Rightarrow b_{min} = 19.6$ mm

Pour une même surface d'une section de poutre, la forme rectangulaire a un moment résistant $w = I / v_{max}$ plus faible que celui de la forme en T. Par conséquent cette dernière est plus appropriée pour le tronçon BC où le moment fléchissant est plus important.