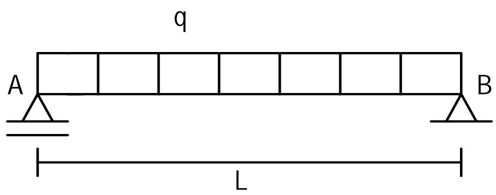
# CORRIGE DU SUJET 8

## CORRIGE DE L'EXERCICE 1

Tenant compte de la symétrie de la poutre les réactions aux appuis sont:

$R_A = R_B = qL / 2$




Le moment à une distance x de A:

$$M_A = \frac{qL}{2}x - q\frac{x^2}{2}$$

Les équations différentielles de la déformée s'écrivent alors:

$$EI\ddot{V} = -q\frac{L}{2}x + \frac{q}{2}x^2$$

$$EI\dot{V} = -q\frac{L}{4}x^2 + \frac{q}{6}x^3 + C$$

$$EIV = -q\frac{L}{12}x^3 + \frac{q}{24}x^4 + Cx + D$$

Les conditions aux appuis:

$V(0) = 0 \;\Rightarrow\; D = 0$

$V(L) = 0 \;\Rightarrow\; C = qL^3 / 24\ EI$

La flèche maximale est à mi-travée:

$$V_{max} = V\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{5qL^4}{384EI}$$

La contrainte maximale est provoquée par le moment maximal à mi-travée $M_{max} = qL^2/8$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}\,y}{I} \le [\sigma] \quad \text{avec} \quad y = d/2$$

A la limite de la contrainte admissible on a: $\dfrac{8L^2d}{16I} = [\sigma]$

$$\Rightarrow \frac{q}{I} = \frac{125 \times 10^6 \times 16}{L^2 d}$$

En substituant l'expression de I/q dans l'équation de la flèche maximale, on obtient:

$$V_{max} = 141 \times 10^{-6} \frac{L^2}{d}$$

L'expression de la flèche peut être mise sous la forme $V_{max} = K \dfrac{L^2}{d}$

avec $K = 141 \times 10^{-6}$

**CORRIGE DE L'EXERCICE 2**

**1- Etude cinématique:**

L = 3b -2a -r

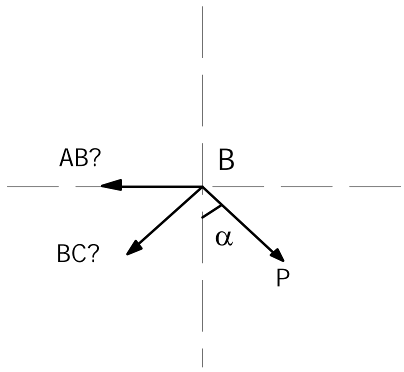
= 3 x 5 - 2 x 5 - 3 = 0 le système est isostatique.

**2- Détermination des efforts par la méthode des noeuds**

**Noeud B:**

$$AB + \frac{2}{\sqrt{5}} BC - P \sin\alpha = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} BC + P \cos\alpha = 0$$



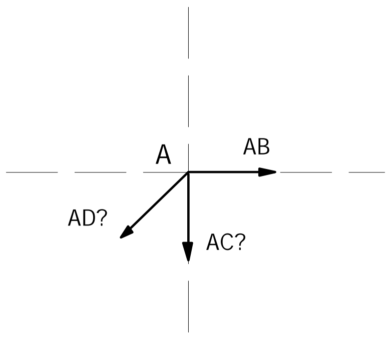

$\Rightarrow$

$$AB = P \sin\alpha + 2P \cos\alpha \quad \text{et} \quad BC = -P\sqrt{5} \cos\alpha$$

**Noeud A:**

$$AB - \frac{AD}{\sqrt{2}} = 0$$

$$AC + \frac{AD}{\sqrt{2}} = 0$$




$$\Rightarrow \ AD = \sqrt{2} P \sin\alpha + 2\sqrt{2} P \cos\alpha \quad \text{et} \quad AC = -2P \cos\alpha - P \sin\alpha$$

**Noeud D:**

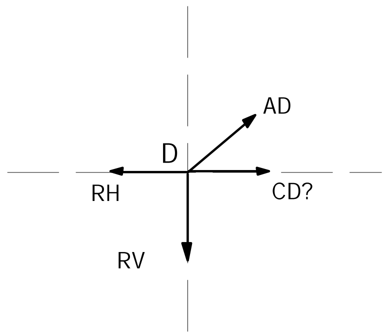
$$\sum M_{/D} = 0 \Rightarrow R_c = 2P\cos\alpha + P\sin\alpha$$

$$\sum M_{/C} = 0 \Rightarrow R_{DV} = 2P\cos\alpha + P\sin\alpha$$

$$CD + \frac{AD}{\sqrt{2}} - P\sin\alpha = 0$$

$$\frac{AD}{\sqrt{2}} - R_{DV} = 0$$

$$\Rightarrow \; CD = -2P\cos\alpha$$




Le système doit supporter la charge P suivant toutes les directions possibles. Etant données les directions les plus défavorables correspondent à α = 45° et 0°; on remplace dans les expressions des efforts les valeurs de α, et on obtient:

| barres | α = 0 | α = 45 | $L_{eff} = L$ (m) |
|---|---|---|---|
| AB | + 2P | + 2.12P | 2.00 |
| AC | - 2P | - 2.12P | 1.00 |
| AD | + 2.83P | + 3P | 1.14 |
| BC | - 2.24P | - 1.58P | 2.24 |
| CD | - 2P | - 1.41P | 1.00 |

La barre la plus tendue est AD avec un effort de + 3P, elle doit être vérifiée à la résistance.

La barre la plus comprimée et en même temps la plus élancée est BC avec un effort de

- 2.24P, elle doit être vérifiée à la résistance et à la stabilité.

**3- Vérification à la résistance:**

$$\sigma^{+}_{max} = \frac{3P}{A} \le [\sigma_{+}] \Rightarrow P \le \frac{100 \times 225 \times 10^{-3}}{3} = 7.5tf$$

$$\sigma^{-}_{max} = \frac{2.24P}{A} \le [\sigma_{-}] \Rightarrow P \le \frac{70 \times 225 \times 10^{-3}}{2.24} = 7.04tf$$

**4- Vérification à la stabilité:**

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{S}} = 4.33$$

$$\lambda = \frac{\mu L_{eff}}{i_{min}} = \frac{223.6 \times 1}{4.33} = 51.6 < \lambda_{lim}$$

On utilise la formule empirique de Yssinski pour déterminer la contrainte critique:

$\sigma_{cr} = a - b\lambda$ avec $a = 293$ kgf/cm² et $b = 1.94$ pour le bois

$\sigma_{cr} = 293 - 1.94 \times 51.6$

$= 192.9$ kgf/cm²

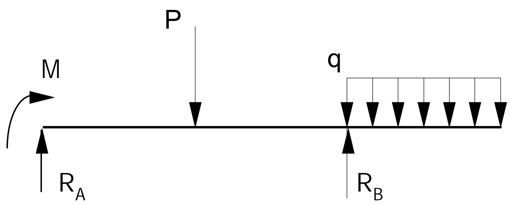
$$[\sigma]_S = \frac{\sigma_{cr}}{n_{st}} = 96.4 \text{kgf}/\text{cm}^2$$

$$\frac{2.24P}{S} \leq [\sigma]_s \Rightarrow P \leq 9.7\text{tf}$$

donc $P \leq \min(7.5, 7.04, 9.7) \Rightarrow P_{max} \leq 7.04$ tf

## CORRIGE DE L'EXERCICE 3

Le système est une fois hyperstatique. On doit donc écrire l'équation de la déformée aux niveaux des appuis. La méthode des paramètres initiaux est utilisée pour déterminer les expressions de la déformée.




On écrit les équations universelles suivantes:

$$EI\theta(x) = EI\theta_0 + \frac{Mx}{1!} + \frac{R_A x^2}{2!} - \frac{P(x-a)^2}{2!} + \frac{R_B(x-2a)^2}{2!} + \frac{q(x-2a)^3}{3!}$$

$$EIV(x) = EIV_0 + EI\theta_0 x + \frac{Mx^2}{2!} + \frac{R_A x^3}{3!} - \frac{P(x-a)^3}{3!} + \frac{R_B(x-2a)^3}{3!} + \frac{q(x-2a)^4}{4!}$$

Les conditions aux limites:

$EIV(0) = 0 \Rightarrow EIV_0 = 0 \Rightarrow V_0 = 0$

$EI\theta(0) = 0 \Rightarrow EI\theta_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0$

$EIV(2a) = 0 \Rightarrow 2Ma^2 + R_A (2a)^2/6 - P(a)^3/6 = 0$

$\Rightarrow 2M + (4/3)R_A a - Pa/6 = 0$

On écrit les équations de l'équilibre statique:

$\Sigma M_{/A} = 0 \Rightarrow M + Pa - 2R_B a + 2.5\, qa^2 = 0$

$\Sigma M_{/B} = 0 \Rightarrow M + 2R_A a - Pa + 0.5qa^2 = 0$

On a trois équation à trois inconnues qui résultent en:

$$R_A = \frac{11}{16}P - \frac{3}{8}qa$$

$$R_B = \frac{5}{16}P + 1.375qa$$

$$M = -\frac{3}{8}Pa + \frac{1}{4}qa^2$$

Application numérique: pour a = 1.0 m, P = 2 t et q = 1 t/m

$R_A = 1$ t

$R_B = 2$ t

M = -0.5 t.m

La flèche est maximale pour θ(x) = 0, on vérifie cette condition dans chaque zone de la poutre:

$$0 \le x \le 1 \Rightarrow -0.5\,x + 0.5\,x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \Rightarrow V(1) = \frac{-1}{12EI}$$

$$1 \le x \le 2 \Rightarrow -0.5\,x + 0.5\,x^2 - (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2 \Rightarrow V(2) = 0$$

$$2 \le x \le 3 \text{ à l'extrémité libre } V(3) = \frac{-1}{8EI}$$

$$f_{max} = \max\left\{\left|\frac{-1}{12EI}\right|, \left|\frac{-1}{8EI}\right|\right\} = \frac{1}{8EI}$$