CORRIGE DU SUJET 6

CORRIGE DE L'EXERCICE 1

Le moment appliqué est repris par l'acier et le cuivre en même temps. L'équation de la statique à une section quelconque peut donc s'écrire:

$$M_a + M_c = M$$

M_a: le moment repris par l'acier

M_c: le moment repris par le cuivre

L'acier et le cuivre étant solidaires, la condition de compatibilité est donnée par:

$$\varphi_a = \varphi_c \Rightarrow \frac{M_a L}{G_a I_a} = \frac{M_c L}{G_c I_c}$$

avec $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

De (1) et (2) on tire alors:

$$M_a = \frac{E_a I_a}{E_a I_a + E_c I_c} M$$

$$M_c = \frac{E_c I_c}{E_a I_a + E_c I_c} M$$

Application numérique:

$$I_a = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi(120^4 - 100^4)}{32} = 10.54x10^6\,mm^4$$

$$I_c = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi x 100^4}{32} = 9.82x10^6\,mm^4$$

$$M_c = \frac{0.7x10^5\,x9.82x10^6}{(2.1x10.54+0.7x9.82)10^5\,x10^6} M = 0.237M$$

$$M_c = 2.37kN.m$$

$$M_a = (1-0.237)M = 7.63kN.m$$

Les contraintes tangentielles

$$\tau_c = \frac{7.63x10^6\,x60}{10.54x10^6} = 43.52\,N/mm^2 < [\tau]_a$$

$$\tau_a = \frac{2.37x10^6\,x50}{9.82x10^6} = 12.1N/mm^2 < [\tau]_c$$

$$\varphi = \frac{7.63x10^6\,x2000}{1x10^5\,x10.54x10^6} = 1.44x10^{-2}\,rd = 0.73^o$$

CORRIGE DE L'EXERCICE 2

L'allongement sous l'effet de la température:

$$(\Delta L_1 + \Delta L_2)_T = \alpha L_1 \Delta T + \alpha L_2 \Delta T = (L_1 + L_2)\alpha\Delta T$$

Le raccourcissement sous l'effet de l'effort normal est:

$$(\Delta L_1 + \Delta L_2)_N = \frac{NL_1}{ES_1} + \frac{NL_2}{ES_2} = \frac{N}{E}\left(\frac{L_1}{S_1} + \frac{L_2}{S_2}\right)$$

La poutre étant bi-encastrée, la condition de compatibilité géométrique s'écrit alors:

$$(L_1 + L_2)\alpha\Delta T = \frac{N}{E}\left(\frac{L_1}{S_1} + \frac{L_2}{S_2}\right)$$

L'expression de l'effort normal N devient alors:

$$N = \frac{(L_1 + L_2)E\alpha\Delta T}{\frac{L_1}{S_1} + \frac{L_2}{S_2}}$$

CORRIGE DE L'EXERCICE 3

1/ Pour éviter toute contraintes de compression au niveau de l'encastrement on doit avoir:

$$\sigma_{min} \geq 0$$

$$\sigma_{\min} = \frac{N}{A} - \left|\frac{M_y}{W_y}\right| - \left|\frac{M_z}{W_z}\right|$$

avec:

$$N = P\cos\alpha$$

$$M_y = \left|PL\cos\alpha - Pe\sin\alpha\right|$$

$$M_z = 0$$

$$\text{Si } PL\cos\alpha > Pe\sin\alpha \Rightarrow M_y = PL\cos\alpha - Pe\sin\alpha$$

$$\text{Si } PL\cos\alpha < PeL\sin\alpha \Rightarrow M_y = -PLe\cos\alpha + Pe\sin\alpha$$

Pour le premier cas on a:

$$\frac{P\sin\alpha}{A} - \frac{PL\cos\alpha - Pe\sin\alpha}{W} \geq 0$$

$$(\frac{1}{A} + \frac{e}{W})\sin\alpha - \frac{L}{W}\cos \geq 0$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\alpha \leq \frac{L}{W}(\frac{1}{A} + \frac{e}{W})$$

de la même manière, pour le deuxième cas on obtient:

$$\mathrm{tg}\alpha \leq \frac{L}{W}(-\frac{1}{A} + \frac{e}{W})$$

Application numérique:

$$W = \frac{a^3}{6} = 10.67\mathrm{x}10^6\,\mathrm{mm}^3$$

$$\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{\dfrac{1000}{10.67\mathrm{x}10^6}}{\dfrac{1}{16\mathrm{x}10^4} + \dfrac{180}{10.67\mathrm{x}10^6}} = 4.05 \Rightarrow \alpha_1 = 76.14°$$

$$\sigma_{\max} = \frac{10\mathrm{x}10^6 \sin 76.14}{16\mathrm{x}10^4} + 10\mathrm{x}10^6\left[\frac{1000\cos 76.14 - 180\sin 76.14}{10.67\mathrm{x}10^6}\right] = 121.6\mathrm{N/mm}^2$$

$$\mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{\dfrac{1000}{10.67\mathrm{x}10^6}}{-\dfrac{1}{16\mathrm{x}10^4} + \dfrac{180}{10.67\mathrm{x}10^6}} = 8.25 \Rightarrow \alpha_2 = 83.5°$$

$$\sigma_{\max} = \frac{10x10^6 \sin 83.5}{16x10^4} + 10x10^6 \left[\frac{-1000 \cos 83.5 + 180 \sin 83.5}{10.67x10^6} \right] = 122.6\mathrm{N/mm}^2$$

2/ Pour des contraintes uniformes au niveau de l'encastrement on doit vérifier:

$$\sigma_{\min} = \sigma_{\max}$$

$$\frac{\mathrm{Psin}\,\alpha}{\mathrm{A}} + \left[\frac{-\mathrm{Pesin}\,\alpha + \mathrm{PLcos}\,\alpha}{\mathrm{W}} \right] = \frac{\mathrm{Psin}\,\alpha}{\mathrm{A}} - \left[\frac{-\mathrm{Pesin}\,\alpha + \mathrm{PLcos}\,\alpha}{\mathrm{W}} \right]$$

$$2\mathrm{esin}\,\alpha = 2\mathrm{Lcos}\,\alpha \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{L}}{\mathrm{e}} \Rightarrow \alpha = 79.8^{\mathrm{o}}$$

Dans ce cas

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \frac{\mathrm{Psin}\,\alpha}{\mathrm{A}} = \frac{10x10^6 \sin 79.8}{16x10^4} = 61.5\mathrm{N/mm}^2$$

CORRIGE DE L'EXERCICE 4

Pour une console uniformément chargée on a:

$$\mathrm{T}_{\max} = \mathrm{qL}$$

$$\mathrm{M}_{\max} = \frac{\mathrm{qL}^2}{2}$$

$$\sigma_{\max} = \frac{\mathrm{My}}{\mathrm{I}} = \frac{3\mathrm{qL}^2}{\mathrm{bh}^2} \leq [\sigma] \Rightarrow \mathrm{q}_{\mathrm{flexion}} \leq \frac{[\sigma]\mathrm{bh}^2}{3\mathrm{L}^2}$$

$$\tau_{\max} = \frac{\mathrm{TS}^*}{\mathrm{Ib}} = \frac{3\mathrm{T}}{2\mathrm{bh}} = \frac{3\mathrm{qL}}{2\mathrm{bh}} \leq [\tau] \Rightarrow \mathrm{q}_{\mathrm{cisaillement}} \leq \frac{2[\tau]\mathrm{bh}}{3\mathrm{L}}$$

La condition de résistance au cisaillement est prépondérante quand la contrainte de cisaillement maximale atteint sa contrainte admissible [τ] avant que la contrainte normale maximale n'arrive au seuil [σ] ($q_{cisaillement} < q_{flexion}$). En terme d'équations ceci peut s'écrire sous la forme:

$$\frac{2[\tau]\mathrm{bh}}{3\mathrm{L}} < \frac{[\sigma]\mathrm{bh}^2}{3\mathrm{L}^2}$$

$$\Rightarrow \mathrm{L} < \frac{\mathrm{h}}{2}\frac{[\sigma]}{[\tau]} \Rightarrow \mathrm{L}_0 = \frac{\mathrm{h}}{2}\frac{[\sigma]}{[\tau]}$$

La console est elastiquement instable sous l'effet d'une force P si:

$$\mathrm{P} > \mathrm{P}_{\mathrm{cr}}$$

$$\mathrm{P} > \frac{\pi^2 \mathrm{EI}_{\min}}{\mathrm{L}_{\mathrm{eff}}^2} \Rightarrow \mathrm{L}_{\mathrm{eff}} > \sqrt{\frac{\pi^2 \mathrm{EI}_{\min}}{\mathrm{P}}}$$