

Chapitre 9

TORSION

9.1 GENERALITES

Si de tous les efforts internes seul le moment M_x est présent, il provoque une torsion. Ce type de sollicitation est très répandu dans les structures de mécanique et surtout au niveau des arbres entraînés par les moteurs. L'analyse des éléments des structures de génie civil soumis à la torsion est moins fréquente car l'existence du moment de torsion entraîne que les forces extérieures doivent obligatoirement appartenir à un plan perpendiculaire à celui de l'élément, et cela n'est pris en compte que lors de l'analyse des structures en 3-dimensions, comme par exemple l'installation de tuyauterie d'un système de refroidissement d'une centrale nucléaire ou d'une base de pompage de pétrole (Fig. 9.1).

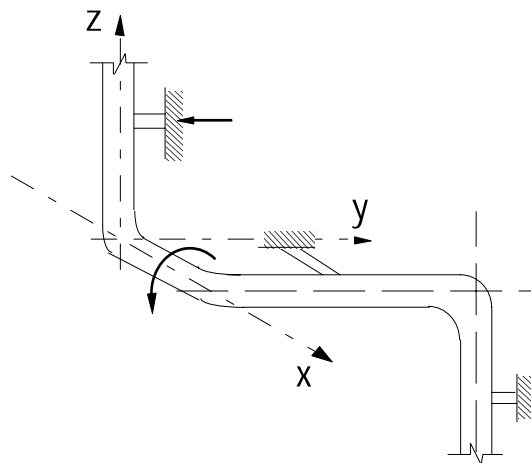


Fig. 9.1

9.2 CONTRAINTES ET DEFORMATION

Lorsqu'on sollicite en torsion une poutre circulaire, on constate qu'une section quelconque tourne dans son plan d'un angle proportionnel à son abscisse. Si l'angle de rotation est petit, alors la longueur de la barre et le rayon de la section restent inchangés.

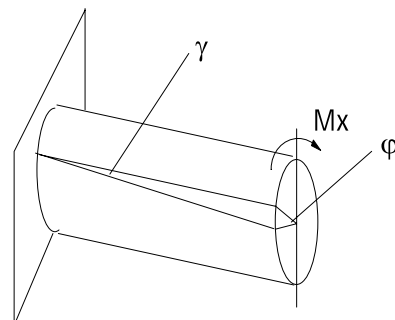


Fig. 9.2

De plus, une ligne longitudinale sur la surface de la barre a-b tourne d'un petit angle vers la position a-b', On constate qu'un élément rectangulaire infinitésimal sur la surface de la barre de longueur dx se déforme en parallélogramme. L'angle de la déformation γ est appelé: distorsion exprimé par:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{bb'}{ab} \quad (9-1)$$

$$bb' = r d\varphi \quad \text{et} \quad ab = dx$$

En tenant compte du fait que l'angle γ est petit on assimilera $\operatorname{tg} \gamma$ à γ et on obtient alors:

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dx} \quad (9-2)$$

$\frac{d\varphi}{dx}$ est la rotation relative analogue à $\frac{\Delta L}{L}$: déformation relative longitudinale.

D'après la loi de Hooke au cisaillement:

$$\tau = G \gamma \quad (9-3)$$

$$\Rightarrow \tau = Gr \frac{d\varphi}{dx} \quad (9-4)$$

La relation entre le moment de torsion et l'angle φ peut être obtenue sachant que les contraintes tangentielles τ réparties sur la section sont statiquement équivalentes à un couple égal et opposé au couple de torsion M_x :

$$M_x = \int_s r \tau ds \quad (9-5)$$

En substituant τ par son expression (9-4)

$$M_x = \int_s r^2 G \frac{d\varphi}{dx} ds \quad (9.6)$$

Finalement, la relation entre le moment de torsion et l'angle

$$M_x = G \frac{d\varphi}{dx} \int_s r^2 ds \quad (9-7)$$

On reconnaît dans cette expression le moment quadratique polaire:

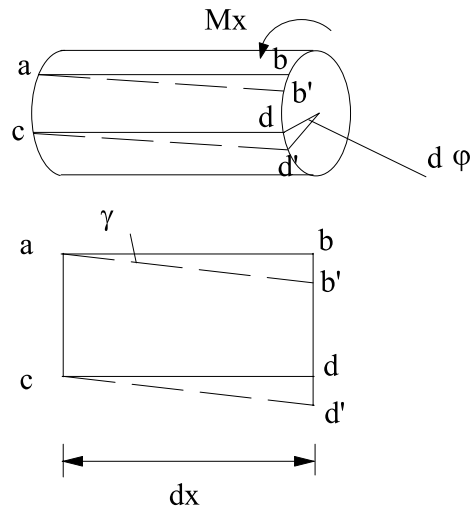


Fig. 9.3

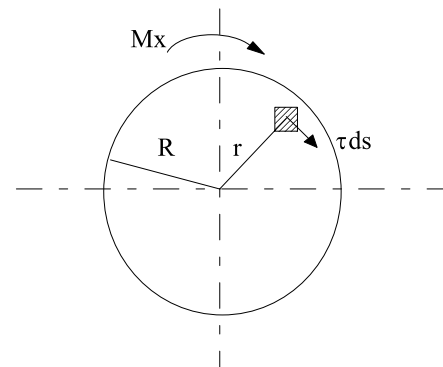


Fig. 9.4

$$I_p = \int_s r^2 ds \quad (9-8)$$

D'où l'expression de la déformation angulaire relative:

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{GI_p} \quad (9.9)$$

La quantité GI_p est la rigidité à la torsion.

En remplaçant $\frac{d\varphi}{dx}$ par sa valeur dans l'expression (9-4), on obtient:

$$\tau = \frac{M_x r}{I_p} \quad (9.10)$$

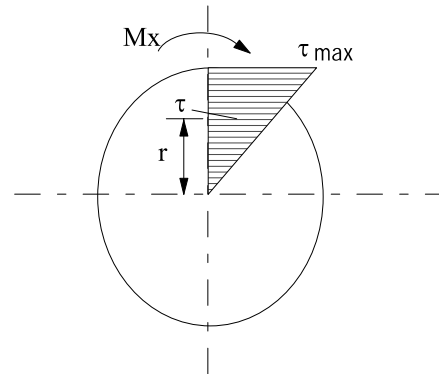


Fig. 9.5

Cette formule montre que les contraintes sont proportionnelles à la distance du point considéré au centre de gravité de la section. On peut alors tracer le graphe de répartition de la contrainte dans une section. La contrainte tangentielle est maximale sur les fibres extérieures:

$$\text{Pour } r = R \quad \tau_{\max} = \frac{M_x R}{I_p} \quad (9-11)$$

La quantité $W_p = \frac{I_p}{R}$ est appelée *module de torsion*.

L'angle de rotation d'une poutre de longueur L peut être obtenue de l'expression (9-9):

$$\varphi = \int_0^L \frac{M_x}{GI_p} dx \quad (9-12)$$

Si la forme de la section et le moment sont constants alors:

$$\varphi = \frac{M_x L}{GI_p} \quad (\text{le glissement d'une extrémité par rapport à l'autre})$$

9.3 TORSION DES BARRES DE SECTION RECTANGULAIRES

L'hypothèse des sections planes ne peut être admise lors de la torsion des sections non-circulaires et donc les méthodes de la résistance des matériaux ne peuvent pas être appliquées.

Dans ce paragraphe, on utilisera les formules obtenues par les méthodes de la théorie d'élasticité pour le cas des sections rectangulaires.

La distribution des contraintes d'une section rectangulaire est représentée dans la figure ci-dessous (Fig. 9-5) et la contrainte maximale est donnée par la formule:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_t} \quad (9-14)$$

Avec $W_t = \alpha hb^2$ (9-15)

$$\tau' = \beta \tau_{\max} \quad (9-16)$$

Et l'angle de rotation

$$\varphi = \frac{M_x L}{GI_t} \quad (9-17)$$

Avec $I_t = \eta hb^3$

Les coefficients α , β et η sont donnés en fonction du rapport h/b dans le tableau suivant:

h/b	1.00	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00
α	0.208	0.231	0.239	0.246	0.256	0.267
β	1.000	0.859	0.820	0.795	0.766	0.753
η	0.141	0.196	0.214	0.229	0.249	0.263

9.4 CALCUL DE RESISTANCE A LA TORSION

En plus de la condition de résistance, lors du calcul des barres à la torsion, on vérifie aussi la condition de rigidité. Les deux conditions s'écrivent donc:

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_t} \leq [\tau]$$

$$\varphi_{\max} = \frac{M_x L}{GI_t} \leq [\varphi]$$

On admet généralement $[\varphi] = 0.3^\circ / 1 \text{ m de longueur}$

9.5 APPLICATION

Vérifier la résistance et la rigidité de la barre ci-dessous sachant que le diamètre $d = 100 \text{ mm}$, $G = 8 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$, $[\tau] = 0.7 [\sigma] = 40 \text{ N/mm}^2$, et $[\varphi]/L = 0.3^\circ/\text{m}$.

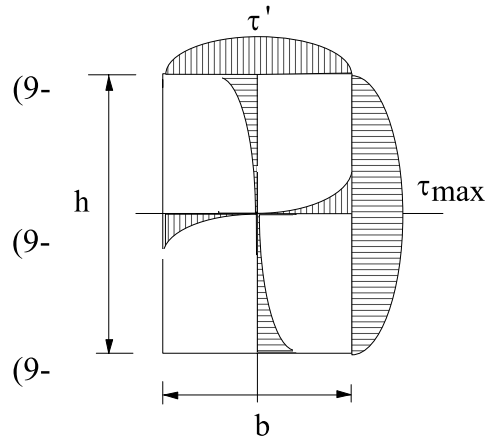


Fig. 9.6

On trace le diagramme du moment de torsion pour déterminer la valeur maximale.

A l'encastrement:

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow M + 2 - 4 + 4 \times 2 = 0$$

$$M = -6 \text{ kN.m}$$

Tronçon I : $0 \leq x \leq 2$

$$M = 4x - 6$$

$$M(0) = -6 \text{ kN.m} \text{ et } M(2) = 2 \text{ kN.m}$$

Tronçon II: $0 \leq x \leq 1$

$$M = 2 \text{ kN.m}$$

$$\text{d'où } M_{x\text{max}} = 6 \text{ kN.m}$$

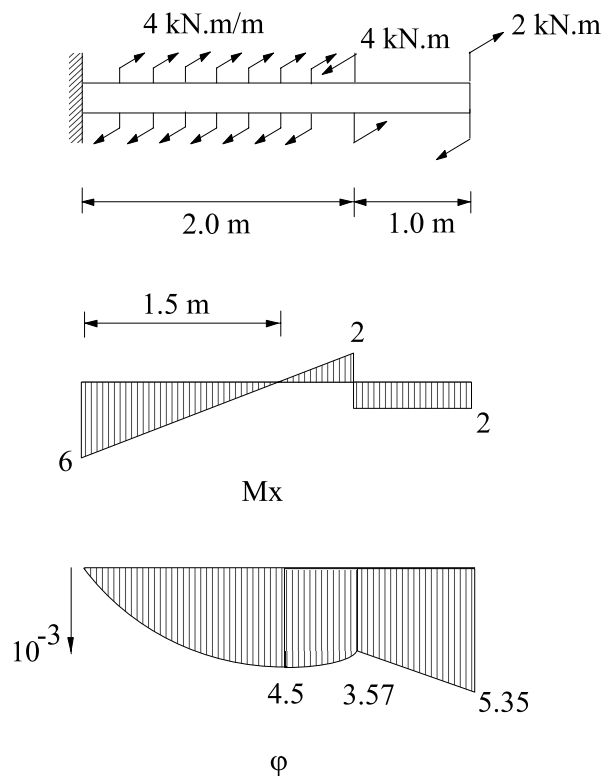


Fig. 9.7

Vérification à la résistance:

$$W_t = \frac{I_p}{d/2} = \frac{\pi d^4}{32 \times d/2} = \frac{\pi}{16} d^3$$

$$\tau_{\text{max}} = \frac{6 \times 16 \times 10^6}{\pi \times 10^6} = 30.57 \text{ N/mm}^2 < [\tau]$$

Vérification à la rigidité

$$\varphi = \int_0^x \frac{M_x}{GI_t} dx$$

avec:

$$G = 8 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$$

$$I_p = 0.1 (100)^4 = 0.1 \times 10^8 \text{ mm}^4$$

Comme le moment n'est pas constant le long de la barre, on détermine dans chaque tronçon la loi de variation de l'angle de rotation et on déduit la valeur maximale.

Tronçon I:

$$M = 4x - 6$$

$$\varphi = \frac{1}{GI_p} \int_0^x (4x - 6) dx = \frac{1}{GI_p} (2x^2 - 6x)$$

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(2) = -4/GI_p$$

$$\varphi' = 0 \Rightarrow x = 1.5 \text{ m} \Rightarrow \varphi_{\max} = \frac{-4.5 \times 10^3 \times 10^6}{8 \times 0.1 \times 10^8 \times 10^4} = 5.63 \times 10^{-3} < [\varphi]$$

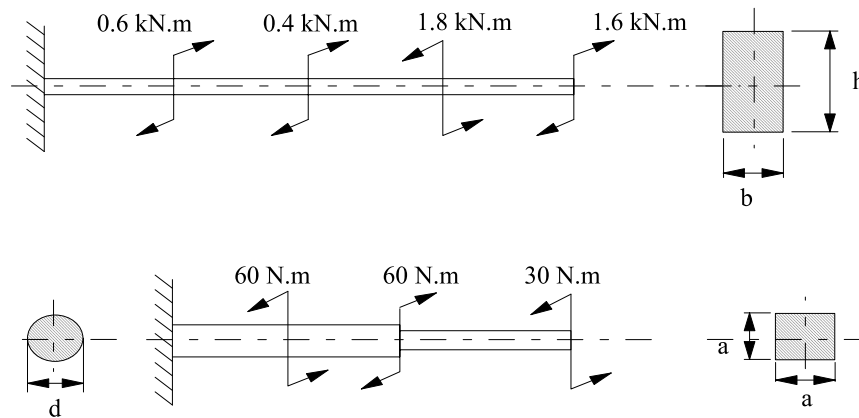


Fig. E9.1

Tronçon II:

$$M = -2 \text{ kN.m}$$

$$\varphi^{\text{II}} = \frac{1}{GI_p} \int_0^x -2 dx = \frac{-2x}{GI_p}$$

$$\varphi^{\text{II}}(x=0) = \varphi^{\text{I}}(2) = 5.63 \times 10^{-3}$$

$$\varphi^{\text{II}}(x=1) = -5.63 \times 10^{-3} - \frac{2 \times 10^6 \times 10^3}{8 \times 10^4 \times 0.1 \times 10^8} = -7.5 \times 10^{-3}$$

EXERCICES / chapitre 9

9.1 Déterminer d , a , b et h sachant que $[\tau] = 60 \text{ N/mm}^2$ et $h/b = 2$.

✓ $d = 13.7 \text{ mm}$, $a = 13.4 \text{ mm}$,
 $b = 37.8 \text{ mm}$,
 $h = 75.6 \text{ mm}$

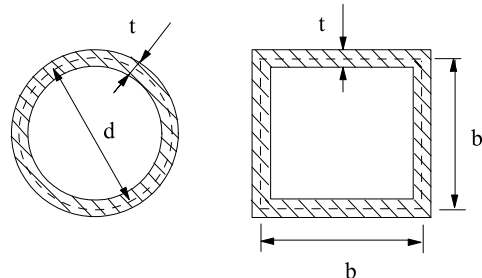


Fig. E 9.3

9.2 Vérifier la résistance et la rigidité du tube de la Fig. E9.2, sachant que $[\tau] = 70 \text{ N/mm}^2$, $[\phi] = 0.3^\circ$ et $G = 0.8 \times 10^5 \text{ kN/mm}^2$

✓ $\tau_{max} = 67.9 \text{ N/mm}^2$,

$\phi = 1.945^\circ > [\phi]$.

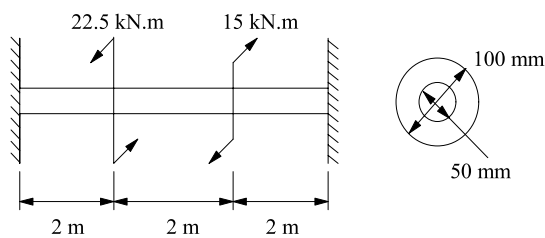


Fig. E9.2

9.3 Les deux barres tubulaires de la Fig. E9.3. ont les même caractéristiques: longueur, épaisseur, aire de la section, matériau et sont sollicitées par des moments de torsion de même grandeur, évaluer les rapports des contraintes tangentielles et des angles de torsion pour ces deux barres. (utiliser les formules de Bredt pour les sections à parois fermées minces)

✓ $\frac{\tau_1}{\tau_2} = \frac{\pi}{4}$, $\frac{\phi_1}{\phi_2} = 0.617$

9.4 Un arbre de 50 mm de diamètre est solidaire à un tube de 100 mm de diamètre extérieur. L'assemblage comme le montre la Fig. E9.4 est assuré par 10 boulons sur une circonférence de 250 mm de diamètre.

Déterminer le diamètre intérieur du tube et celui des boulons pour pouvoir transmettre le moment maximale de l'arbre, sachant que ce dernier a une contrainte tangentielle admissible de 50 N/mm^2 et celle des boulons est de 25 N/mm^2 .

✓ 96.7 mm , 7.1 mm

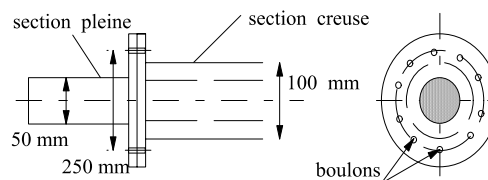


Fig. E9.4

9.5 Une barre de 20 mm de diamètre et 1 m de long est encastrée à ses extrémités. A une distance de 250 mm de l'une des extrémités, on applique un moment de torsion qui provoque une contrainte tangentielle maximale dans le matériau de 35 N/mm².

Calculer l'intensité du moment de torsion et l'angle de rotation au point d'application du moment. On donne $G = 76 \text{ kN/mm}^2$.

✓ *73.3 N.m, 0.67°*