

# Chapitre 7

## FLEXION

### 7.1 GENERALITES

L'action des forces latérales sur une poutre se traduit en une déformation de l'axe longitudinal initialement droit en une courbe curviligne (Fig. 7.1). L'état d'une section de poutre ou de toutes les composantes des efforts internes, seule un moment fléchissant  $M_y$  ou  $M_z$  n'est pas nul, est dit état de *flexion plane pure*. La déformation résultante de ce genre de sollicitation est connue sous le nom de la *flèche*. Lorsque l'effort tranchant n'est pas nul, en ce cas la sollicitation est dite *flexion simple*.

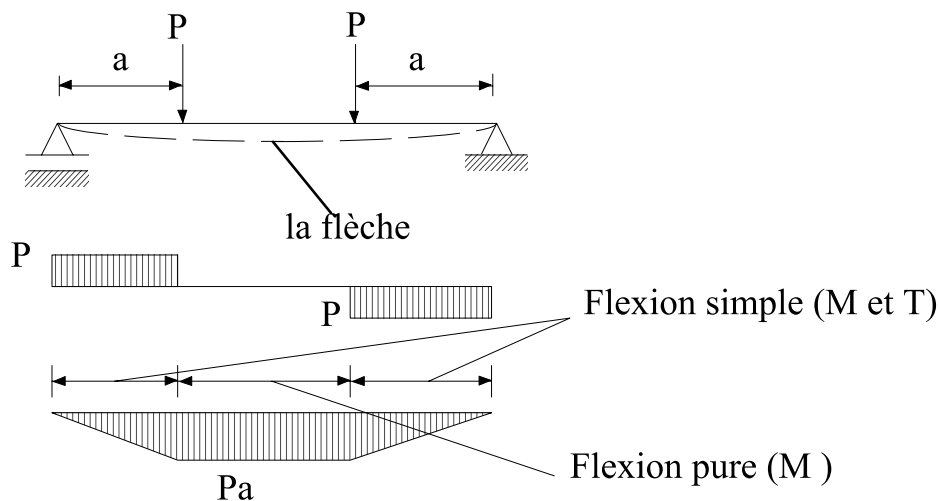


Fig. 7.1

Dans le chapitre des efforts internes nous avons vu comment déterminer le diagramme des moments fléchissants le long de l'axe longitudinal d'une poutre d'une structure isostatique. Dans ce chapitre nous proposons d'étudier le passage de l'effort interne aux contraintes agissant sur les sections de la poutre et particulièrement la distribution des contraintes normales et tangentielles résultant d'une flexion et d'un effort tranchant.

### 7.2 CONTRAINTES NORMALES EN FLEXION PLANE

Des contraintes normales se développent dans les sections transversales d'une poutre soumise à un moment fléchissant. La Fig. 7.2 montre les fibres tendues et comprimées externes d'un tronçon de poutre fléchi. Dans la zone comprimée les fibres se raccourcissent tandis que dans la zone de traction elles s'allongent. Ces deux zones sont séparées par un plan neutre ayant un rayon de courbure R et dont la longueur ne varie pas lors de la flexion. L'allongement relatif d'une fibre se trouvant à une distance y de l'axe neutre peut être écrit:

$$\varepsilon = \frac{a'b'}{ab} = \frac{(R + y)d\theta - dx}{dx} \quad (7-1)$$

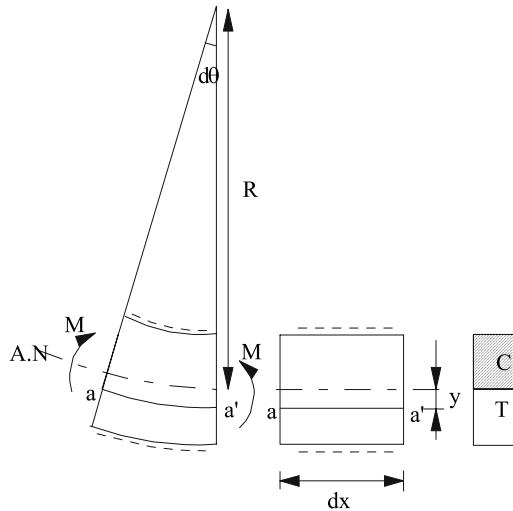
Avec:

$$dx = R d\theta \quad (7-2)$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{y}{R} \quad (7-3)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (7-4)$$

D'où 
$$\sigma = \frac{E}{R} y \quad (7-5)$$



**Fig. 7.2**

La condition d'équilibre qui lie les contraintes et les efforts internes dans la section transversale d'une poutre est :

$$\iint_s \sigma y ds = M \quad (7-6)$$

En Introduisant la valeur de  $\sigma$  de l'équation (7-5) dans l'expression (7-6) on obtient :

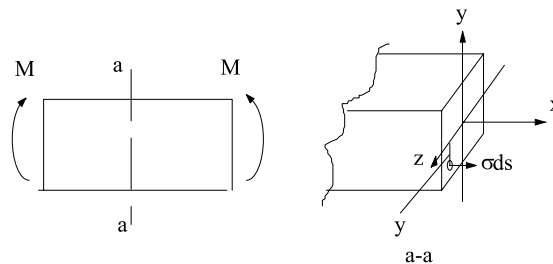
$$M = \iint_s \frac{E}{R} y^2 ds \quad (7-7)$$

$$M = \frac{E}{R} \iint_s y^2 ds \quad (7-8)$$

$$M = \frac{EI_z}{R} \quad (7-9)$$

En introduisant l'équation (7-5) dans (7-9), la contrainte normale en tout point de la section de la poutre distante de y de l'axe x a pour valeur:

$$\sigma = \frac{My}{I_z} \quad (7-10)$$



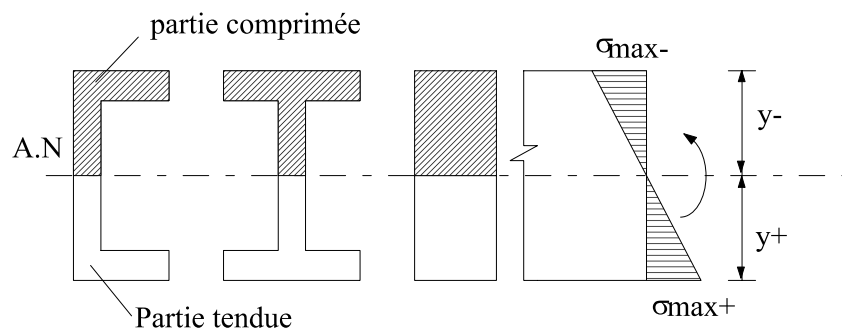
**Fig. 7.3**

L'équation (7-10) est appelée formule de Navier dont on note que:

- ✓ Les contraintes sont proportionnelles au moment fléchissant et inversement proportionnelles au moment d'inertie  $I$ .
- ✓ Les contraintes varient linéairement avec la distance  $y$  de l'axe neutre.
- ✓ La fibre la plus sollicitée (la contrainte de traction ou de compression maximale) est située au point le plus éloigné de l'axe neutre.

L'application de cette formule est générale, mais on ne considérera que les cas particuliers suivants:

**1-Cas d'une section ayant un axe de symétrie horizontal :**



**Fig. 7.4**

$$y^-_{\max} = y^+_{\max} \quad (7-11)$$

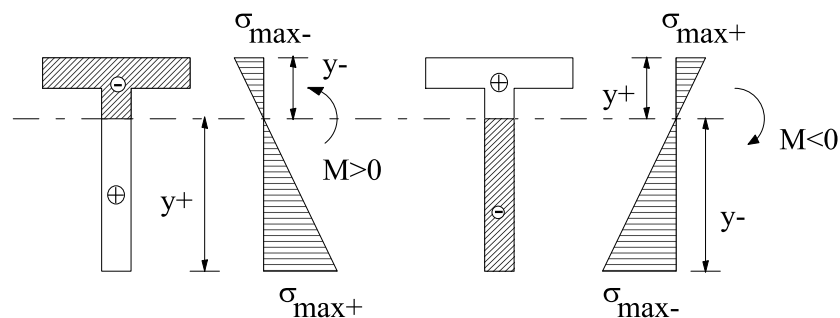
$$|\sigma^-_{\max}| = |\sigma^+_{\max}| = \sigma_{\max} = \frac{My_{\max}}{I_x} \quad (7-12)$$

$\sigma_{\max}$  : La contrainte normale maximale.

$$W_y = \frac{I_x}{Y_{\max}} = \frac{I_x}{h/2} \quad : \text{Module résistant de la section.}$$

**2-Cas d'une section n'ayant pas un axe de symétrie horizontal :**

Dans ce cas les contraintes de traction et de compression maximales sont différentes.



**Fig. 7.5**

$$|\sigma_{\max}^-| = \left| \frac{My_{\max}^-}{I_x} \right| \quad (11-13)$$

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{My_{\max}^+}{I_x} \quad (11-14)$$

$\sigma_{\max}^-$  : Contrainte de compression max.

$\sigma_{\max}^+$  : Contrainte de traction max.

$y_{\max}^-$  et  $y_{\max}^+$  : Distances des fibres comprimées et tendues les plus éloignées.

M : Moment fléchissant.

D'où on distingue 2 modules résistants de la section :  $\frac{Y_{\max}^+}{I_x}$        $\frac{Y_{\max}^-}{I_x}$

### 7.3 CALCUL DE RESISTANCE EN FLEXION

La vérification d'une poutre en flexion se fait à partir de la condition de résistance par rapport aux contraintes normales maximales dans la section.

**a) Pour une section symétrique:**

$$|\sigma_{\max}| = \left| \frac{My_{\max}}{I_z} \right| \leq \min([\sigma_-], [\sigma_+]) \quad (11-15)$$

**b) Pour une section non symétrique**

$$\text{Si } [\sigma_-] = [\sigma_+] = [\sigma] \Rightarrow \max(|\sigma_{\max}^-|, |\sigma_{\max}^+|) \leq [\sigma] \quad (11-16)$$

$$\text{Si } [\sigma_-] \neq [\sigma_+] \quad \begin{cases} |\sigma_{\max}^-| \leq [\sigma_-] \\ |\sigma_{\max}^+| \leq [\sigma_+] \end{cases} \quad (11-17)$$

### 7.4 APPLICATIONS

#### **Exemple 1**

Vérifier la résistance de la poutre ci-dessous si la contrainte admissible  $[\sigma]=160 \text{ N/mm}^2$ .

#### **Solution:**

Les démarches:

- Construire le diagramme des moments
- Déterminer la section dangereuse

-Calculer la contrainte maximale

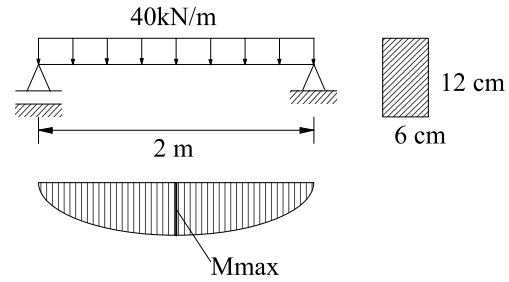
-Comparer cette contrainte avec  $[\sigma]$ .

Le moment maximal est à mi-travée:

$$M_{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{40 \times 4}{8} = 20 \text{ kN.m}$$

$$I_z = \frac{60 \times 120^3}{12} = 860 \times 10^4 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max} y_{\max}}{I_z} = \frac{2 \times 10^6 \times 60}{864 \times 10^4} = 138.8 \text{ N/mm}^2 < 160 \text{ N/mm}^2$$



**Fig. 7.7**

### Exemple 2

$$I_z = 2 \times 10^6 \text{ mm}^4 \quad [\sigma_-] = 80 \text{ N/mm}^2$$

$$h = 160 \text{ mm} \quad [\sigma_+] = 120 \text{ N/mm}^2$$

$$y_G = 60 \text{ mm}$$

### Solution

-Diagramme des moments :

$$\Rightarrow M_{\max}^+ = 10 \text{ kN.m}$$

$$M_{\max}^- = 20 \text{ kN.m}$$

-Contraintes :

Pour  $M_{\max}^+ = 10 \text{ kN.m}$

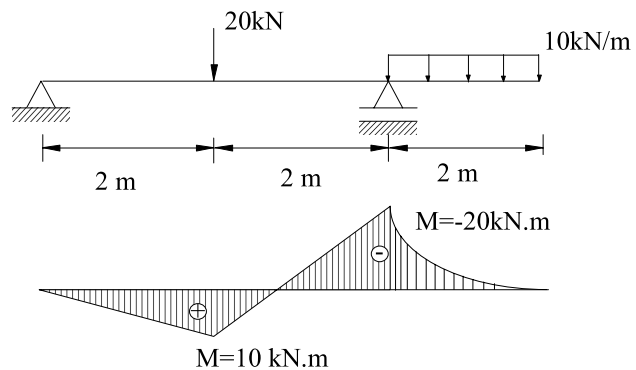
$$\sigma_{\max}^+ = \frac{10 \times 10^5 \times 60}{2 \times 10^6} = 30 < 120$$

et pour  $M_{\max}^- = 20 \text{ kN.m}$

$$\sigma_{\max}^+ = \frac{20 \times 10^5 \times 100}{2 \times 10^6} = 100 \text{ N/mm}^2 < 120$$

$$|\sigma_{\max}^-| = \frac{20 \times 10^5 \times 60}{2 \times 10^6} = 60 \text{ N/mm}^2 < [\sigma_-]$$

$$|\sigma_{\max}^-| = \frac{10 \times 10^5 \times 100}{2 \times 10^6} = 50 < [\sigma_-]$$



**Fig. 7.8**

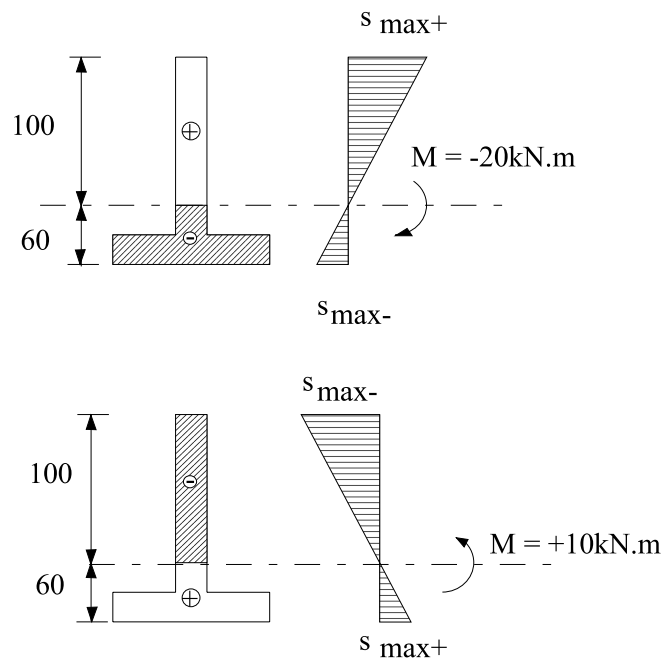


Fig. 7.9

**7.5 CONTRAINTES TANGENTIELLES EN FLEXION**

Quand une poutre est soumise à l'action simultanée d'un moment fléchissant et d'un effort tranchant, en plus des contraintes normales, des contraintes tangentielles apparaissent aussi au niveau des sections droites. Aux contraintes tangentielles d'un élément unitaire Fig.7.10 sont associées des contraintes tangentielles égales sur les facettes horizontales (réciprocité des contraintes tangentielles). L'existence de ces contraintes suivant les couches horizontales de la poutre peut être démontré par superposition de deux poutres de hauteur h simplement appuyées aux extrémités et soumises à une force concentrée à mi-travée Fig. 7.11. On constate qu'il y a un glissement des fibres inférieures ce qui signifie qu'il y a des contraintes tangentielles horizontales empêchant ce glissement dans le cas d'une poutre équivalente de hauteur 2h.

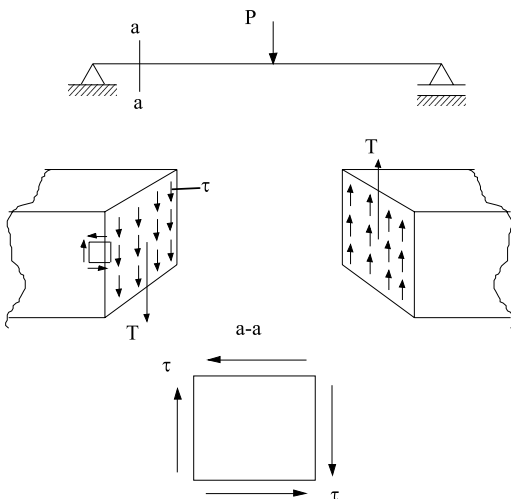


Fig. 7.10

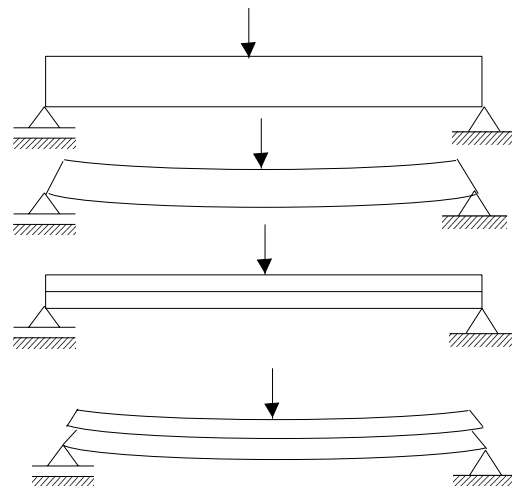


Fig. 7.11

Considérons un tronçon de poutre de longueur  $dx$  soumis à un effort tranchant constant  $T$  et un moment fléchissant variant de  $M$  à  $M+dM$ . (Fig. 7.12)

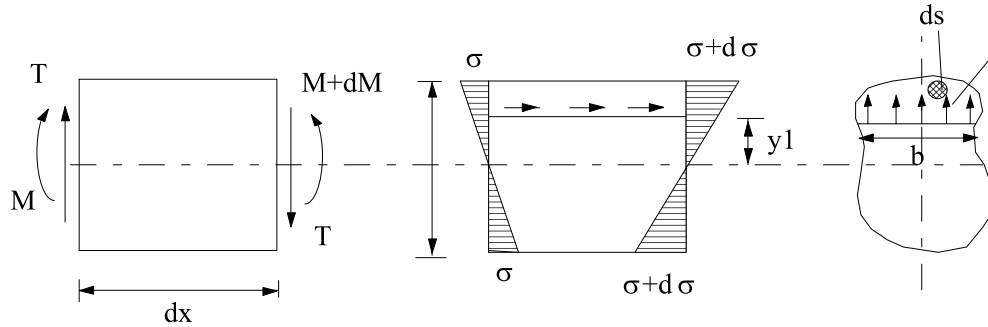


Fig. 7.12

La partie supérieure de l'élément  $dx$  à une distance  $y_1$  de l'axe neutre est en équilibre sous l'action des contraintes  $\sigma$  à gauche de l'élément  $dx$ ,  $\sigma+d\sigma$  à droite de l'élément et de la contrainte tangentielle horizontale  $\tau$ .

Ecrivons l'équation d'équilibre:

$$\iint_{S_1} \sigma ds - \iint_{S_1} (\sigma + d\sigma) ds + \int \tau b dx = 0 \quad (11-18)$$

En supposant que les contraintes tangentielles sont constantes dans la section  $b dx$ :

$$\tau b dx = \iint_{S_1} d\sigma ds = \iint_{S_1} \frac{dM}{I} y ds \quad (11-19)$$

$$= \frac{dM}{I} \iint_{S_1} y ds \quad (11-20)$$

$$= \frac{dM}{I} S_1^* \quad (11-21)$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{dM}{dx} \frac{S_1^*}{I b} = \frac{TS_1^*}{I b} \quad (11-22)$$

En un point arbitraire d'une section droite d'une poutre soumise à l'action simultanée d'un effort tranchant et d'un moment fléchissant, la valeur de la contrainte tangentielle est déterminée par:

$$\tau = \frac{TS_z}{I_z b} \quad (11-23)$$

Avec:

$\tau$  : Contrainte tangentielle.

$b$  : Largeur de la section dans la couche considérée.

$I_z$  : Moment d'inertie.

$S_z^*$  : Moment statique de l'aire située soit au-dessous soit au-dessus de la couche considérée.

$T$  : L'effort tranchant.

La contrainte tangentielle varie avec l'ordonnée  $y$  comme le rapport  $S_z^* / b$ .  $\tau$  est nul aux points les plus éloignés du centre de gravité et passe par un maximum pour l'ordonnée correspondant au maximum de  $S_z^* / b$ .

### 7.5.1 Poutre à section rectangulaire

Dans le cas d'une section rectangulaire (Fig. 7.13), la largeur  $b$  est constante. A une distance  $y$  de l'axe  $z-z$  on détermine le moment statique  $S_z^*$  et le moment quadratique  $I_z$ . La formule (11-23) devient :

$$S_1 = \frac{b}{2} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (11.24)$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

On obtient:

$$\tau = \frac{6T}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad (11.25)$$

$$y = 0 \quad \tau_{\max} = \frac{3}{2} \frac{T}{bh}$$

$$y = h/2 \quad \tau_{\min} = 0$$

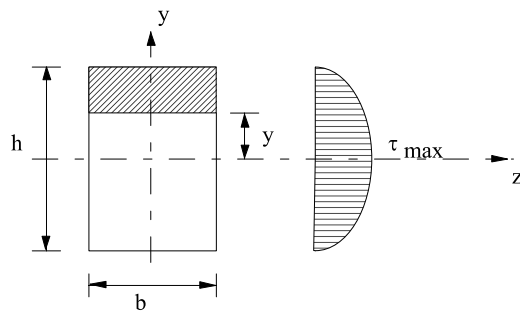


Fig. 7.13

### 7.5.2 Poutre à section circulaire

$$S_1 = \frac{2}{3} (R^2 - y^2)^{3/2} \quad (\text{Variation parabolique}).$$

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4}, \quad b = \sqrt{R^2 - y^2}$$

$$\text{D'où } \tau = \frac{4T}{3\pi R^4} (R^2 - y^2) \quad (11.28)$$

$$\Rightarrow \tau_{\max} = \frac{4T}{3\pi R^2} \text{ pour } y=0 \quad (11.29)$$

$$\tau_{\min} = 0 \text{ pour } y = R$$

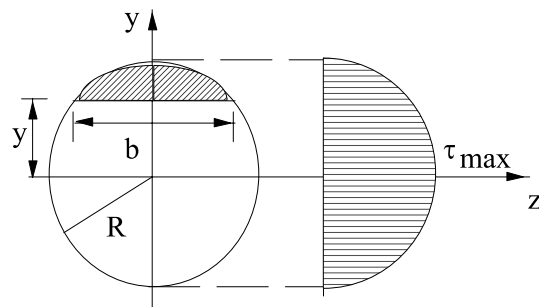


Fig. 7.14



### 7.5.3 Poutre à section triangulaire

$$S = \frac{1}{3}b \left( \frac{2}{3}h - y \right) \left( \frac{1}{3}h + y \right)$$

$$= \frac{Bh^3}{36}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3T}{Bh} \text{ pour } y = h/6 \quad (11-30)$$

$$\tau_{\min} = 0 \quad y = 2h/3 \text{ ou } y = -h/3$$

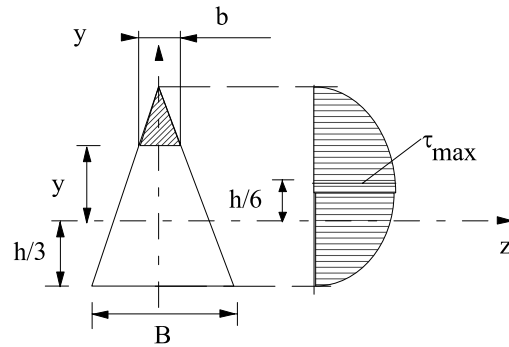


Fig. 7.15

## 7.6 CALCUL DE RESISTANCE EN FLEXION SIMPLE

Dans le cas général d'une poutre en flexion simple, les valeurs maximales des contraintes normales et celle des contraintes tangentielles se trouvent en des points différents. Dans les points où  $\sigma$  est maximale  $\tau = 0$ , par contre là où  $\tau$  est maximale  $\sigma = 0$ .

D'habitude on vérifie les contraintes normales et tangentielles séparément.

Comme le cas d'une flexion pure, la condition de résistance s'écrit:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{M_{\max} Y}{I} \leq [\sigma] \quad (11-31)$$

On devra aussi vérifier:

$$\tau_{\max} = \frac{T_{\max} S_{\max}^*}{bI} \leq [\tau] \quad (11-32)$$

Cependant dans le cas où dans des sections de poutre il existe des points supportant l'action simultanée d'importantes contraintes normales et tangentielles, il convient de vérifier la résistance de la poutre par rapport aux contraintes principales, en utilisant les diverses théories de résistance.

## 7.7 APPLICATION

Construire le diagramme des contraintes tangentielles de la section rectangulaire creuse de la Fig. 7.16.

### *Solution*

Pour tracer le diagramme des contraintes on calcule les contraintes tangentielles aux limites des zones de variation brutale et on joint les points de discontinuités par des segments de droites et par des paraboles quadratiques entre les points où la variation est exprimée par la formule:

$$\tau = \frac{TS^*}{I_z b}$$

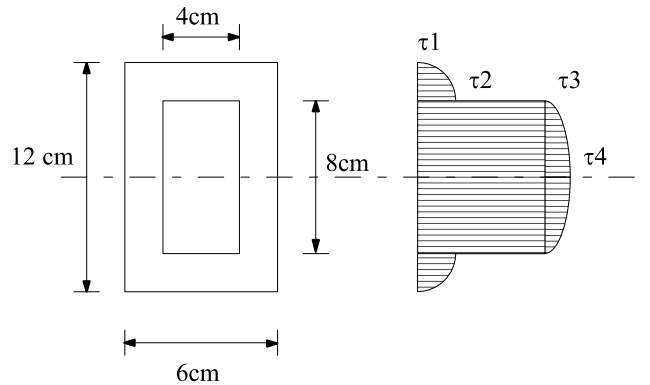
$$T = 80 \text{ kN}$$

$$\tau = \frac{TS^*}{I_z b}$$

$$I = \frac{1}{12}(6 \times 12^3 - 4 \times 8^3) = 693.3 \text{ cm}^4$$

Point 1:

$$S_1^* = 0 \Rightarrow \tau_1 = 0$$



**Fig. 7.16**

Point 2: largeur  $b = 6 \text{ cm}$

$$S_2^* = 6 \frac{12-8}{2} \left( \frac{12}{2} - \frac{12-8}{4} \right) = 60 \text{ cm}^3$$

$$\Rightarrow \tau_2 = \frac{80 \times 10^3 \times 60 \times 10^3}{693.3 \times 10^4 \times 60} = 11.54 \text{ N/mm}^2$$

Point 3: même point avec  $b = 6 - 4 = 2 \text{ cm}$  (discontinuité de la section)

$$S_3^* = S_2^* \Rightarrow \tau_3 = \tau_2 \frac{6}{6-4} = 34.6 \text{ N/mm}^2$$

Point 4: milieu de la section

$$S_4^* = S_2^* + (6-4) \frac{8}{2} \times \frac{8}{2} = 76 \text{ cm}^3$$

$$\tau_4 = \frac{80 \times 10^3 \times 76 \times 10^3}{2 \times 693.3 \times 10^4} = 43.9 \text{ N/mm}^2$$

<b>EXERCICES / chapitre 7</b>
-------------------------------

**7.1** Une poutre d'égale résistance en flexion, est une poutre soumise à des contraintes admissibles égales en toute section, sous un chargement donné.

On demande la loi de variation de la hauteur d'une poutre console d'égale résistance en flexion, dont les sections sont rectangulaires et de largeur constante, soumise à une force concentrée à son extrémité.

-Même question pour une poutre sur deux appuis simples soumise à une charge uniformément répartie.

$$\checkmark h^2 = 6Px / b[\sigma], \quad h^2 = 3Px(L-x) / b[\sigma]$$

**7.2** Déterminer le moment fléchissant de résistance maximal d'une poutre en T soumise à une flexion simple, sachant que la largeur de la semelle est de 150 mm, la hauteur totale de la section est de 150 mm et l'épaisseur de l'âme et de la semelle est de 12 mm. La contrainte admissible de tension ou de compression est de 155 N/mm<sup>2</sup>.

Quelle est la valeur maximale d'une force concentrée à mi-travée d'une poutre de 4 m de long et simplement appuyée aux extrémités.

$$\checkmark 10.75 \text{ kN.m}, 10.75 \text{ kN}$$

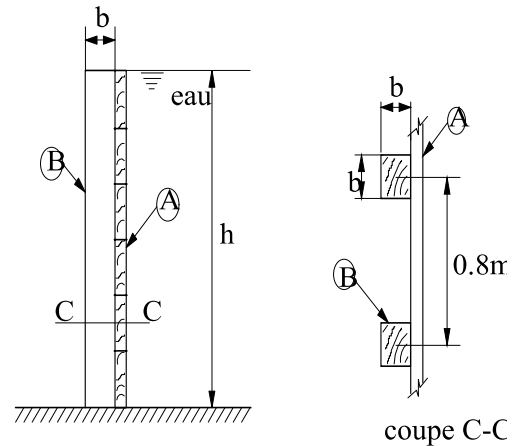
**7.3** Un aqueduc en tôle d'acier d'épaisseur 12 mm a une forme en U de 300 mm de hauteur et 600 mm de largeur extérieure. La ligne est constituée de plusieurs travées de 9.0 m simplement appuyées. Vérifier la résistance de l'aqueduc pour une hauteur d'eau de 250 mm, sachant que la densité de l'acier est de 7.68 g/cm<sup>3</sup> et  $[\sigma] = 155 \text{ N/mm}^2$ .

$$\checkmark \sigma_{max} = 43.62 \text{ N/mm}^2$$

**7.4** Un barrage temporaire est construit par des planches (A) renforcées par des montants encastrés à la base et distants de 0.8 m l'un par rapport à l'autre.

Déterminer la dimension minimale des sections carrées des montants (B) pour une hauteur maximale d'eau de 2 m sachant que la contrainte admissible du bois des montants est de 80 N/mm<sup>2</sup>.

$$\checkmark 199$$



**Fig. E7.4**

**7.5** Une section rectangulaire de 100 mm de hauteur et 12 mm de largeur est soumise à un effort tranchant de 20 kN suivant la hauteur de la section.

a) Calculer la contrainte tangentielle maximale, b) La contrainte tangentielle sur une bande située à 25 mm de la base de la section.

$$\checkmark 25 \text{ N/mm}^2 \quad 18.75 \text{ N/mm}^2$$

**7.6** Une poutre en bois de section rectangulaire est simplement appuyée aux extrémités. Sachant que  $[\sigma] = 12 \text{ N/mm}^2$  et

$[\tau] = 1 \text{ N/mm}^2$ , déterminer le rapport de la portée de la poutre sur la hauteur de la section qui permet à une force appliquée à mi-travée de provoquer à la fois des contraintes tangentielles et normales admissibles.

✓ 6

**7.7** Une poutre en U de 120 mm de profondeur, 60 mm de largeur, 12 mm d'épaisseur des semelles et 8 mm de l'âme est soumise à un effort tranchant de 50 kN. Tracer le diagramme de la distribution des contraintes tangentielles dans la section.

✓ *distribution linéaire de 0 à 44.6 N/mm<sup>2</sup> le long de la semelle*

*distribution parabolique 59.9 à 81.4 N/mm<sup>2</sup> (maximum) le long de l'âme*

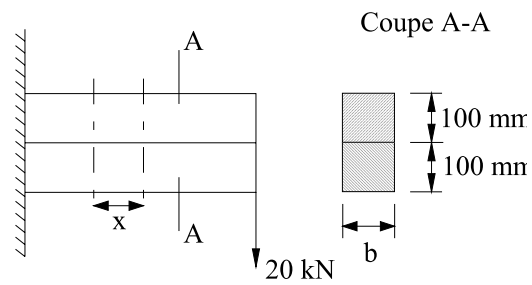
**7.8** On veut réaliser une poutre console à l'aide de deux pièces en bois identiques (Fig. E7.8).

On demande de calculer l'espacement des boulons d'assemblage nécessaire pour obtenir la même résistance à la flexion que pour une poutre d'un seul tenant (à la présence des trous de boulons près).

On utilisera des boulons de diamètre de 16 mm (une seule file sur la largeur), ayant pour taux de cisaillement admissible

$[\tau] = 156 \text{ N/mm}^2$ .

✓ 209 mm



**Fig. E7.8**