

Chapitre 6

TRACTION ET COMPRESSION

6.1 INTRODUCTION

Ce chapitre étudie le comportement des éléments de structure sollicités axialement. Tous les éléments ayant des lignes moyennes droites et soumis à des efforts axiaux (de traction ou de compression) font l'objet de cette étude.

Ce type d'éléments (généralement des barres) peuvent être rencontrés dans différentes structures tel que les systèmes réticulés (ferme, poutre à treillis,...etc), les diagonales de contreventement, les boulons, et les poteaux des bâtiments...etc. Les aires des sections de ces éléments peuvent avoir plusieurs formes: section pleine, creuse, ou à paroi épaisse.

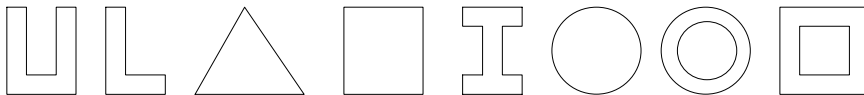


Fig. 6.1

Le calcul des contraintes maximales développées et les déformations longitudinales constituent une étape essentielle dans l'analyse et la conception des structures formées d'éléments sollicités par des efforts axiaux.

6.2 DEFORMATION DES BARRES EN TRACTION ET COMPRESSION

Soit une barre prismatique de longueur L soumise à un effort de traction P (Fig. 6.2).

$$\text{La contrainte normale } \sigma = \frac{N}{S} \quad (6-1)$$

Avec

$N = P$ effort de traction

S : aire de la section.

$$\text{La déformation relative: } \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (6-2)$$

$$\text{La loi de Hooke } : \sigma = E\varepsilon \quad (6-3)$$

En substituant (6-1) et (6-2) dans (6-3)

On obtient:

$$E \frac{\Delta L}{L} = \frac{N}{S} \Rightarrow N = \frac{ES}{L} \Delta L \quad (6-4)$$

Par analogie avec un ressort de raideur K sollicité par un effort N qui se déforme de ΔL , tel que:

$$N = K \Delta L \quad (6-5)$$

La rigidité longitudinale d'une barre est obtenue par identification de l'eq.(6-4) et (6-5):

$$K = \frac{ES}{L} \quad (6-6)$$

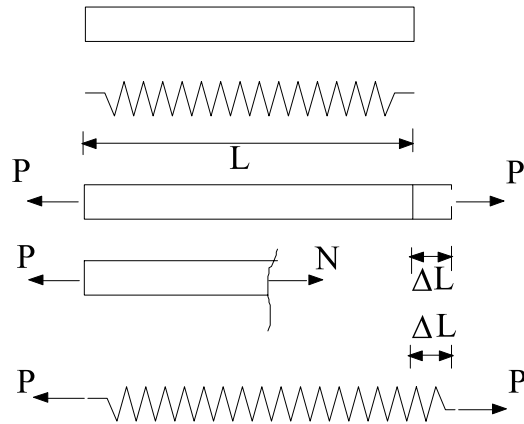


Fig. 6.2

La rigidité longitudinale ou l'aptitude d'un élément à se déformer longitudinalement dépend donc des caractéristiques mécaniques et géométriques de l'élément.

Pour une barre composée de plusieurs tronçons, la déformation totale est donnée par:

$$\Delta L = \sum \frac{N_i L_i}{E_i S_i} \quad (6-7)$$

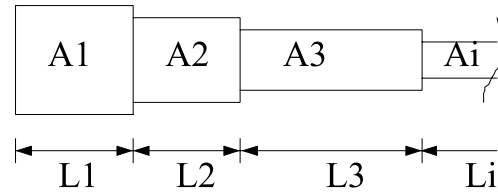


Fig. 6.3

Et pour le cas le plus général où l'aire de la section droite et l'effort normal N varient le long de la ligne moyenne de l'élément, l'équation (6-7) devient alors:

$$\Delta L = \int_0^L \frac{N(x)}{ES(x)} dx \quad (6-8)$$

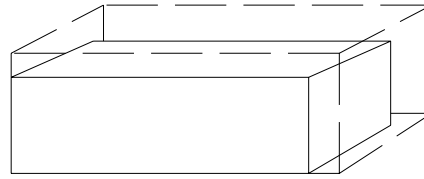
6.3 SOLLICITATIONS DUES A LA VARIATION DE TEMPERATURE

Comme les structures sont généralement sujettes à des variations de température climatique ou industrielle, l'effet de ces dernières se manifeste sous forme de déformations (dilatation et rétrécissement) des éléments. Ces déformations induisent des contraintes supplémentaires. Dans cette section on étudiera l'effet de la variation de température sur les éléments structuraux. Toute variation de température entraîne un changement de dimensions. La déformation est uniforme selon les trois directions et elle est donnée par:

$$\varepsilon = \alpha \Delta T \quad (6-9)$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \varepsilon \quad (6-10)$$

α : Coefficient de dilatation thermique [$1/^\circ\text{C}$]
 ΔT : variation de la température



On donne quelques valeurs du coefficient α pour certains matériaux:

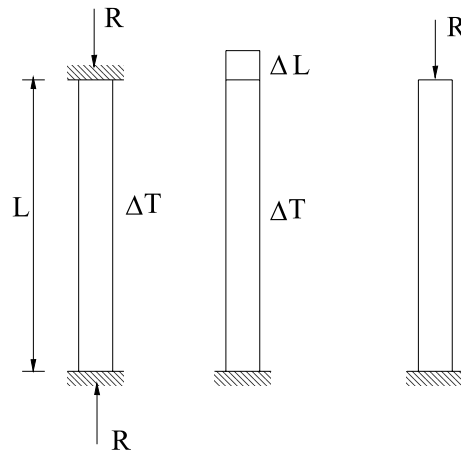
Fig. 6.4

Cuivre: $19.1 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$

Acier : $12 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$

Béton : $11 \times 10^{-6} / ^\circ\text{C}$

La contrainte qui se développe dans une barre bi-encastree, par exemple, soumise à un changement une variation ΔT est équivalente à la contrainte nécessaire de provoquer une déformation égale à celle provoquée par la variation de température mais de signe contraire (Fig. 6.3).



La déformation due à la variation de la température:

Fig. 6.5

$$\varepsilon = \alpha \Delta T$$

La déformation due à la réaction de l'encastrement :

$$\varepsilon = \sigma / E$$

D'où

$$\sigma = E\alpha\Delta T$$

6.4 SYSTEMES DE BARRES ISOSTATIQUES

Un système est isostatique quand on peut déterminer les efforts internes par les seules équations d'équilibre.

Exemple

Déterminer les efforts, les contraintes et les déformations dans les différents tronçons de la colonne représentée sur la Fig. 6.6, sachant que $d_{1-1} = 50$ mm, $d_{2-2} = 100$ mm, $d_{3-3} = 200$ mm et $E = 2.1 \times 10^5$ N/mm²

Section 1-1:

$$N + 400 = 0 \Rightarrow N = -400 \text{ kN}$$

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{-400 \times 10^3}{\pi \times (25)^2} = -203.7 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta L_{AB} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-203.7 \times 3000}{2.1 \times 10^5} = -2.91 \text{ mm}$$

Section 2-2:

$$N + 400 + 2 \times 500 = 0 \Rightarrow N = -1400 \text{ kN}$$

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{-1400 \times 10^3}{\pi \times (50)^2} = -178.3 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta L_{BC} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-178.3 \times 3000}{2.1 \times 10^5} = -2.55 \text{ mm}$$

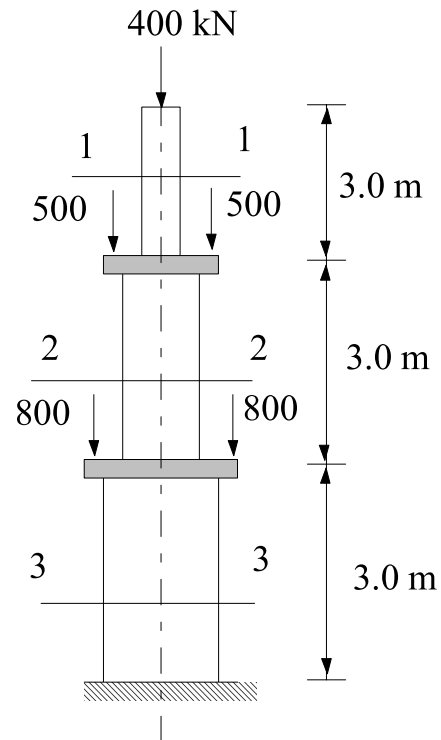


Fig. 6.6

Section 3-3:

$$N + 400 + 2 \times 500 + 2 \times 800 = 0$$

$$\Rightarrow N = -3000 \text{ kN}$$

$$\sigma = \frac{N}{S} = \frac{-3000 \times 10^3}{\pi \times (100)^2} = -95.5 \text{ N/mm}^2$$

$$\Delta L_{CD} = \frac{\sigma L}{E} = \frac{-95.5 \times 3000}{2.1 \times 10^5} = -1.36 \text{ mm}$$

$$\Delta L_t = -2.91 - 2.55 - 1.36 = -6.82 \text{ mm}$$

6.5 SYSTEMES DE BARRES HYPERSTATIQUES

On appelle structures hyperstatiques les structures pour lesquelles les efforts qui sollicitent leurs éléments ne peuvent pas être déterminés à l'aide des équations statiques. La résolution de ces systèmes s'effectue en considérant les aspects décrits ci-dessous:

1/ Aspect statique : écrire les équations d'équilibre des barres sectionnées.

2/ Aspect géométrique: établir le rapport entre les déformations à partir de la compatibilité géométrique.

3/ Aspect physique du problème: établir les relations effort-déformation en utilisant la loi de Hooke : $\Delta L = \frac{NL}{ES}$ pour transformer les expressions de déformation en équations ayant des efforts normaux comme inconnus.

4/ Résolution du système d'équations.

6.5.1 APPLICATION

Soit le système de barres défini sur la figure 6.7 ci-après.

Etant données: $L_1, S_1, L_2, S_2, L_3, S_3, P$ et α

avec $L_2 = L_3$

déterminer les efforts dans les barres.

Solution:

1- Aspect statique

$$\sum F_x = 0$$

$$N_2 \sin \alpha - N_3 \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow N_2 = N_3 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0$$

$$N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha - P = 0$$

$$\Rightarrow N_1 + 2N_2 \cos \alpha = P \quad (2)$$

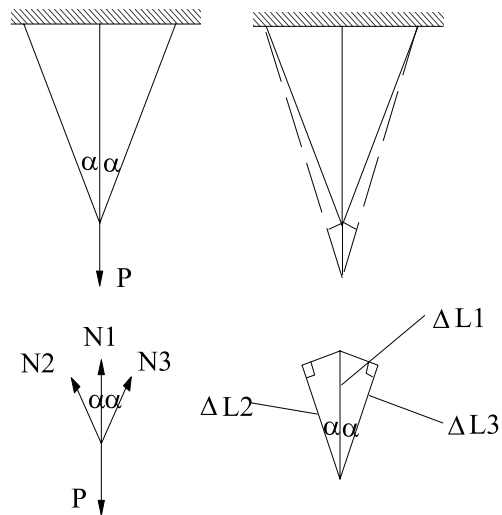


Fig. 6.7

2- Aspect géométrique

$$\Delta l_2 = \Delta l_3 = \Delta l_1 \cos \alpha$$

3- Aspect physique:

$$\Delta L_1 = \frac{N_1 L_1}{ES} \quad \text{et} \quad \Delta L_2 = \frac{N_2 L_2}{ES}$$

En substituant dans (3), on obtient

$$\frac{N_2 L_2}{ES} = \frac{N_1 L_1}{ES} \cos \alpha \Rightarrow N_2 L_2 = N_1 L_1 \cos \alpha$$

4- Synthèse et résolution des équations

On élimine N_3 de (2) $\Rightarrow N_1 + 2N_2 \cos \alpha = P$

de (5) on tire $N_1 = N_2 \frac{L_2}{L_1 \cos \alpha}$

et en combinant (6) et (7) on aura alors

$$\Rightarrow N_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha} \quad \text{et} \quad N_2 = N_3 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

EXERCICES / chapitre 6

5.1 Déterminer la contrainte normale dans les deux sections de la barre ci-dessous, et l'allongement total ΔL sachant que $E = 2.0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$.

✓ $-3.62 \times 10^{-2} \text{ mm}$

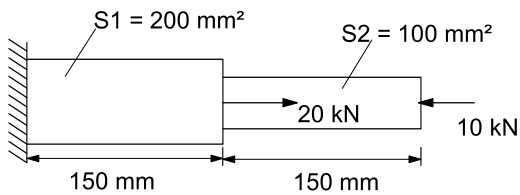


Fig. E5.1

5.2 Deux barres prismatiques sont co-axialement soudées et supportent une charge verticale de 45 kN. L'aire de la section de la barre en acier AB est de 6500 mm^2 et de densité 7.83 gr/cm^3 ; les valeurs correspondantes de la barre en cuivre BC sont 5100 mm^2 et 8.30 gr/cm^3 .

Déterminer les contraintes maximales et minimales dans chaque barre.

✓ barreAB: $9.31, 8.82 \text{ N/mm}^2$,

barreBC: $8.07 \text{ N/mm}^2, 7.31 \text{ N/mm}^2$

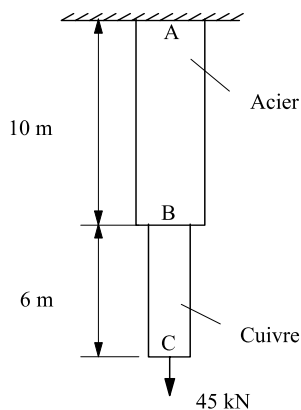


Fig. E5.2

5.3 Les forces de compression et de traction maximales qu'une barre puisse supporter sont 15.4 kN et 6.6 kN respectivement. Si la longueur de cette barre est de 3.2 m et l'aire d'une section transversale est de 418 mm^2 , déterminer la différence entre la longueur maximale et minimale de cette barre sachant que $E = 2.07 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$.

✓ 0.81 mm

5.4 Une barre d'aluminium de 250 mm de long, a une section transversale carrée de 50 mm de côté. La barre est soumise à une tension qui provoque un allongement de 0.29 mm .

Déterminer le changement de température nécessaire pour que le volume de la barre reste inchangé. Le coefficient de Poisson de l'aluminium $\nu = 0.33$ et le coefficient de dilatation thermique $= 2.8 \times 10^{-5} / ^\circ\text{C}$

✓ $-4.7 \text{ }^\circ\text{C}$

5.5 Une barre d'acier de 50 mm de diamètre et de 200 mm de longueur, est libre à se déplacer à l'intérieur d'un tube cylindrique en cuivre d'épaisseur 3 mm .

Déterminer les contraintes qui se développent dans l'acier et le cuivre sous l'effet d'une compression de 100 kN . Les modules d'élasticité de l'acier et du cuivre sont $2.07 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ et $0.90 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ respectivement.

✓ $45.7 \text{ N/mm}^2, 20.56 \text{ N/mm}^2$

5.6 Une barre rigide ABC est suspendue par 3 câbles en acier ayant des longueurs initiales égales. Calculer les tensions des câbles sous l'effet du poids propre de la barre de 1.65 kN. Les aires des sections des câbles A, B et C sont respectivement 6 mm^2 , 12 mm^2 , et 18 mm^2 . Le module d'élasticité de l'acier est $2.07 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$.

Quelle est l'intensité de la force verticale qu'il faut appliquer à une distance de 4.6 m de A pour que la barre ABC reste horizontale.

✓ 495 N, 660 N, 495 N, 2750 N.

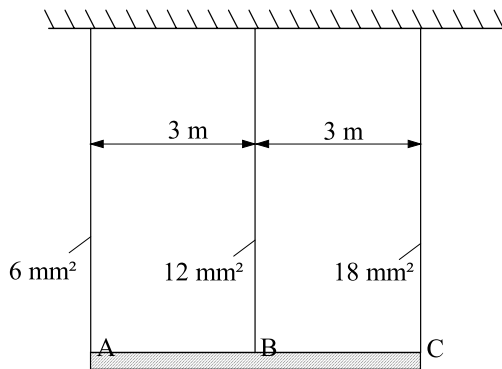
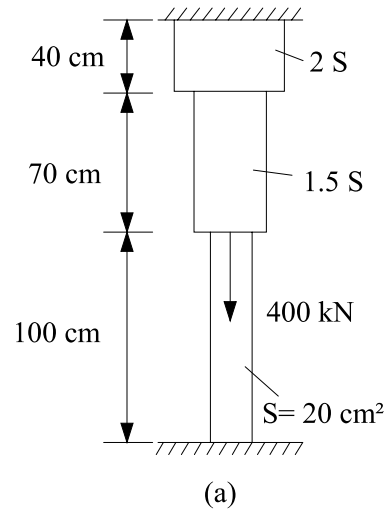


Fig. E5.6

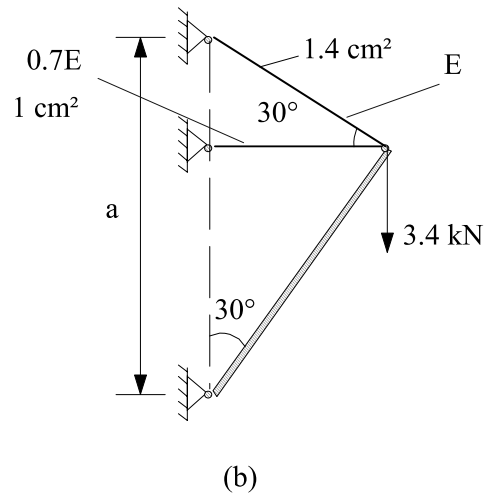
5.7 Déterminer les contraintes normales provoquées dans les barres élastiques des systèmes représentés dans Fig. E5.7 par l'action des forces appliquées.

Le module d'élasticité est le même pour toutes les barres de la colonne (a).

✓ (a) -80, 80, 60; (b) 6.1, 8.7 N/mm²



(a)



(b)

Fig. E5.7

5.8 Déterminer les efforts dans les barres extensibles des systèmes de la Fig. E5.8.

(Les barres hachurées sont infiniment rigides)

✓ (a) 25 kN, (b) 25, 56.5 kN

(c) $N_c = 2PaL/(2a^2+b^2)$,

$N_d = PbL/(2a^2+b^2)$

(d) $N_c = 5.36 \text{ kN}$, $N_d = 5.15 \text{ kN}$

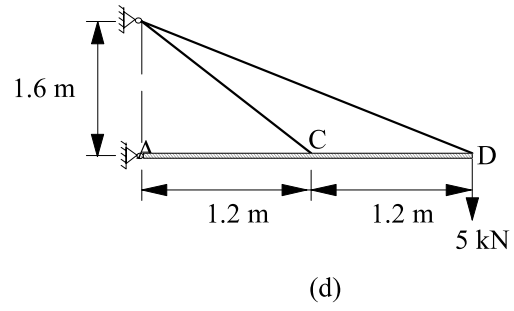
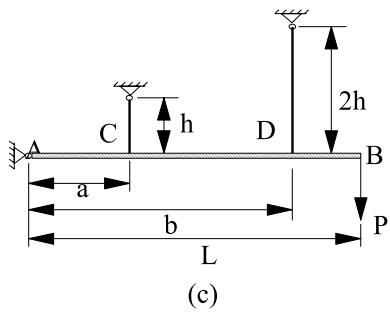
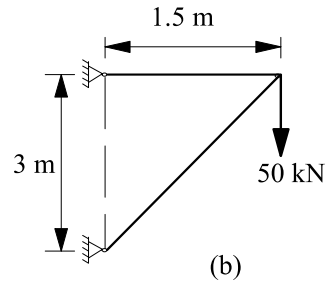
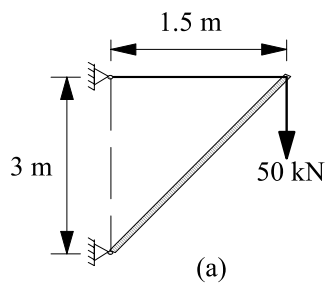


Fig. E5.8