

Chapitre 4

ETATS DE CONTRAINTE ET DE DEFORMATION

4.1 INTRODUCTION

L'objet de ce chapitre est l'étude des effets des charges sur les éléments auxquels elles sont appliquées, en termes de contraintes et de déformations. Ces dernières constituent l'outil principal de mesure de la résistance et de la rigidité des éléments. En d'autres termes ce sont les quantités de base d'appréciation de l'état et du comportement des éléments sous l'effet des charges. Les définitions des notions de contraintes et de déformation seront d'abord présentées, ensuite les différents états de contraintes seront examinés. Les procédés de transformation (translation et rotation) des contraintes et des déformations seront énoncés. Finalement les relations entre les efforts et les contraintes d'une part, et d'autre part, entre ces dernières et les déformations seront aussi établies.

4.2 NOTION DE CONTRAINTE

Les efforts internes définis dans le chapitre précédent, engendré par des forces extérieures, ne sont que les résultantes des efforts élémentaires agissant sur chaque section de l'élément sollicité par les forces extérieures. On appelle ces efforts élémentaires, *contraintes*.

On considère les plans sécants π et π' passant par un point O d'un corps sollicité par des forces extérieures (Fig 4.1). Une contrainte normale σ de traction ou de compression au point O est l'effet d'éloignement ou de rapprochement respectivement des plans π et π' . L'effet de glissement des deux plans est attribué aux contraintes tangentielles τ . L'existence simultanée des contraintes normales et tangentielles tend à déplacer les plans suivant la direction de la résultante dite *vecteur contrainte p*.

L'étude de cette contrainte p pour toutes les orientations de l'élément de surface unitaire ds se trouvant dans un endroit précis de la section est appelée '*état de contrainte autour d'un point*'.

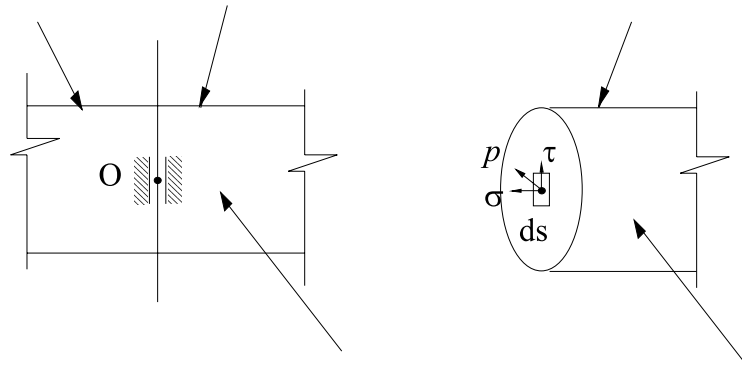


Fig. 4.1

4.3 ETAT DE CONTRAINTE

Découpons au voisinage du point O du corps sollicité un parallélépipède rectangle infiniment petit de côtes dx , dy et dz . Sur chaque face de ce parallélépipède agissent une contrainte normale et deux contraintes tangentielles. La contrainte normale est positive quand elle agit sur une facette positive dans le sens positif de l'axe considéré ou sur une facette négative dans le sens négatif de cet axe. Une contrainte tangentielle est positive quand elle agit sur une facette positive dans le sens positif de l'axe parallèle à la facette ou sur une facette négative dans le sens négatif de l'axe parallèle à cette facette. Toutes les contraintes de l'élément représenté sur la Fig. 4.2a sont positives.

L'état de contrainte plan est le cas particulier d'une seule facette du volume où sur chaque côté agissent une contrainte normale et une contrainte tangentielle (Fig. 4.2b).

L'état de contrainte linéaire est le cas particulier d'un seul côté de la facette sur lequel agissent une contrainte normale et une contrainte tangentielle (Fig. 4.2c).

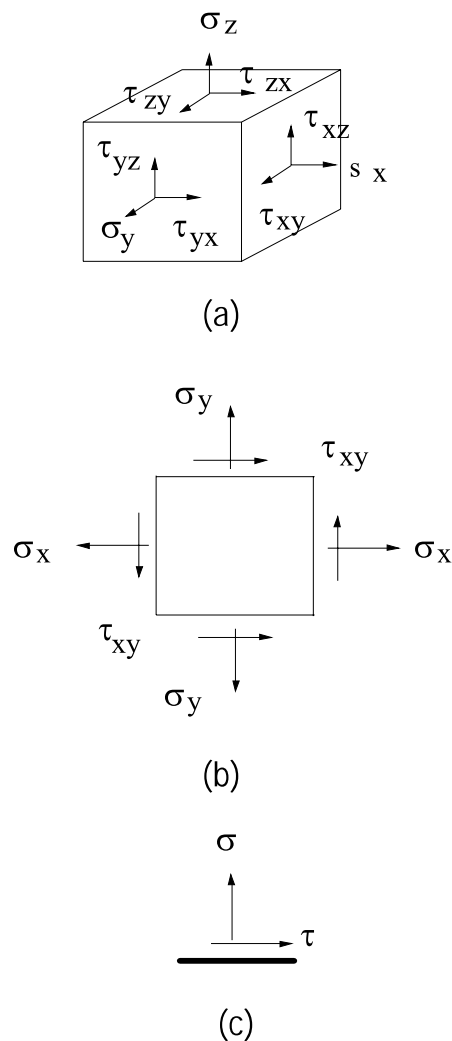


Fig. 4.2

4.3.1 Equations de transformation de l'état de contrainte linéaire

Pour une barre en traction (Fig. 4.3), la contrainte normale qui se développe dans la section S est donnée par:

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad (4-1)$$

L'état de contrainte dans un plan quelconque S_α dont la normale extérieure n_α coupe l'axe σ sous un angle α , la contrainte totale p_α est égale à

$$P_\alpha = \frac{N}{S_\alpha} = \frac{N}{S} \cos \alpha \quad (4-2)$$

$$= \sigma \cos \alpha \quad (4-3)$$

Les contraintes normales et tangentielles dans la section S_α

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos \alpha = \sigma \cos^2 \alpha \quad (4-4)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin \alpha = \sigma \cos \alpha \sin \alpha = (1/2) \sigma \sin 2\alpha \quad (4-5)$$

Etude de l'orientation:

$$\sigma_{\max} = \sigma = p_\alpha \quad \alpha = 0 \Rightarrow \tau_0 = 0 \quad (4-6)$$

$$\tau_{\max} = \sigma/2 \quad \alpha = \pi/4 \Rightarrow \sigma_{\pi/4} = \sigma/2 \quad (4-7)$$

Considérons les contraintes qui agissent sur deux sections orthogonales:

$$\tau_\alpha = (1/2) \sigma \sin 2\alpha \quad (4-8)$$

$$\tau_{\alpha + \pi/2} = -\tau_\alpha$$

c'est la loi de réciprocité des contraintes tangentielles

4.3.2 Equation de contrainte de l'état de contrainte plan

Pour connaître les contraintes suivant une direction α par rapport à l'axe x, nous isolons une partie de l'élément en forme de prisme triangulaire (Fig. 4.4) droit. Soit S l'aire de la face du prisme opposé à l'angle droit, on a:

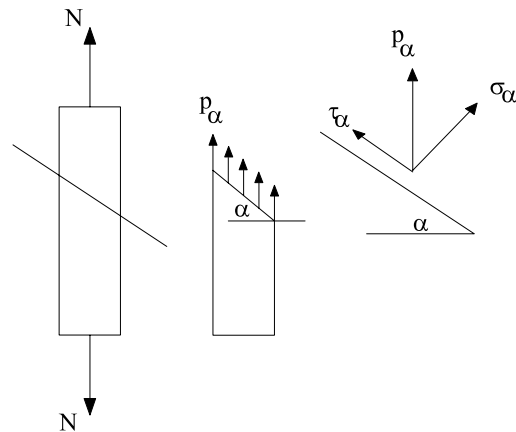


Fig. 4.3

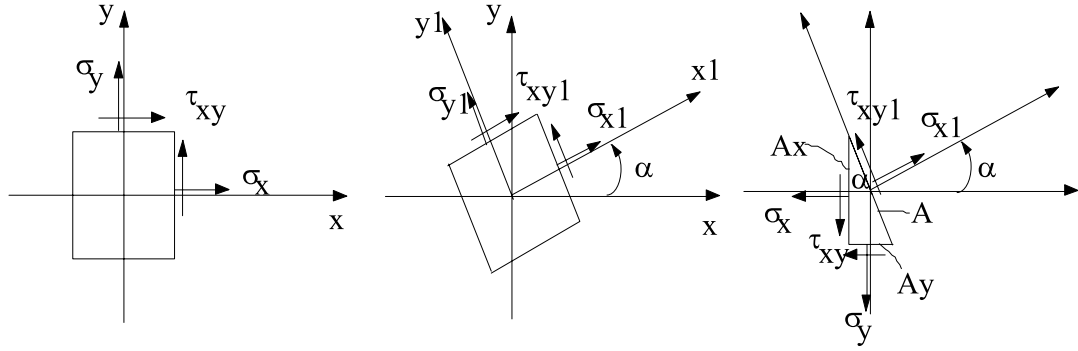


Fig. 4.4

$$A_x = S \cos \alpha \quad (4-9)$$

$$A_y = S \sin \alpha \quad (4-10)$$

Les contraintes sur les différentes faces du prisme doivent s'équilibrer, on a:

Suivant la normale:

$$\sum F_\alpha = 0$$

$$\Rightarrow A\sigma_\alpha - A\sigma_x \cos^2 \alpha - A\tau_{xy} \cos \alpha \cdot \sin \alpha - A\sigma_y \sin^2 \alpha - A\tau_{yx} \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0 \quad (4-11)$$

Suivant la tangente:

$$\sum F_{\alpha+90} = 0$$

$$\Rightarrow A\tau_\alpha + A\sigma_x \cos \alpha \cdot \sin \alpha - A\tau_{xy} \cos^2 \alpha + A\tau_{xy} \sin^2 \alpha - A\sigma_y \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0 \quad (4-12)$$

Soit

$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad (4-13)$$

$$\tau_\alpha = -(\sigma_x - \sigma_y) \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \quad (4-14)$$

en substituant dans les équations (4-13) et (4-14) les expressions de

$\cos^2 \alpha = 1/2(1 + \cos 2\alpha)$, $\sin^2 \alpha = 1/2(1 - \cos 2\alpha)$ et $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 1/2 \sin 2\alpha$, on obtient:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \sigma_{\alpha+90} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_{xy} \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha &= -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha \end{aligned} \quad (4-15)$$

Les équations (4-15) sont connues sous le nom d'équations de transformation des contraintes dans le plan.

Les Contraintes principales:

En variant l'angle α , les contraintes normales et tangentielles varient. Pour des raisons de résistance, les valeurs maximales des contraintes sont d'une grande utilité.

Pour déterminer la facette sur laquelle agit la contrainte normale σ_1 , on annule l'expression de la dérivée par rapport à α de σ_α .

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha = 0 \quad (4-16)$$

$$\text{et on tire } \operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \quad (4-17)$$

En utilisant (4-17), on peut écrire:

$$\cos 2\alpha = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \quad \text{et} \quad \sin 2\alpha = \frac{\tau_{xy}}{R} \quad (4-18)$$

$$\text{avec } R = \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad (4-19)$$

Par substitution dans (4-15), on obtient:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2}{4} + \tau_{xy}^2} \quad (4-20)$$

$$\text{et } \tau_{\alpha_0} = 0 \quad (4-21)$$

Pour distinguer l'orientation des axes principaux, on remplace l'angle $\alpha_0 \in [-\pi/2, +\pi/2]$ donné par la formule (4-17) dans l'expression de σ_α et on la compare avec σ_1 et σ_2 . Ainsi on identifie la direction de l'un des axes principaux, l'orientation du deuxième axe correspond à l'angle $(\alpha_0 \pm \pi/2)$. Le sens positif des angles est le sens trigonométrique.

On peut aussi utiliser les eq. (4-18) et (4-19) pour déterminer l'angle α_0 car sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ un seul angle peut satisfaire les 2 équations en même temps.

Suivant un système d'axes orientés de α par rapport aux axes principaux les équations de transformations s'écrivent en fonction des contraintes normales principales sous les formes suivantes:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \sigma_{\alpha+90} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha \\ \tau_\alpha &= -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha\end{aligned}\quad (4-22)$$

On procède de la même manière que pour les contraintes principales, en annulant l'expression de la dérivée de τ_α :

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha} = 0 \Rightarrow -2 \left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha \right) = 0 \quad (4-23)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} 2\alpha_{00} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} \quad (4-24)$$

on remarque que:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 2\alpha_{00} \times \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= -1 \\ \operatorname{tg} 2\alpha_{00} &= \frac{-1}{\operatorname{tg} 2\alpha_0} = -\operatorname{ctg} 2\alpha_0\end{aligned}\quad (4-25)$$

$$\text{par analogie avec: } \operatorname{tg}(\theta \pm \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg} \theta \quad (4-26)$$

on a donc:

$$\begin{aligned}2\alpha_{00} &= 2\alpha_0 \pm \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \alpha_0 &= \alpha_0 \pm \frac{\pi}{4}\end{aligned}\quad (4-27)$$

Le plan des contraintes tangentielles maximales est à 45° par rapport à celui des contraintes normales principales.

de (4-24) on déduit que:

$$\cos 2\alpha_{00} = \frac{\tau_{xy}}{R} \quad \text{et} \quad \sin 2\alpha_{00} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2R} \quad (4-28)$$

et en substituant ces valeurs dans l'expression τ_α des eq.(4-15) on obtient l'expression de la contrainte tangentielle maximale:

$$\tau_{1,2} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (4-29)$$

Les orientations des facettes des contraintes tangentielles maximales sont déterminées de la même façon que les axes des contraintes principales en remplaçant l'angle $\alpha_{00} \in [-\pi/2, \pi/2]$ dans l'expression (4-15) et on compare avec $\tau_{1,2}$.

La contrainte normale associée est donnée par:

$$\sigma_{ass} = \sigma_{\alpha 00} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \tag{4-30}$$

4.4 CERCLE DE MOHR POUR LES CONTRAINTES

Le principe de la représentation graphique des contraintes connue sous le nom de *cercle de Mohr* est similaire à celui qu'on a décrit dans le chapitre 2 concernant les propriétés géométriques des formes. L'axe des abscisses représente les contraintes normales et les contraintes tangentiels sont projetées sur un axe perpendiculaire dirigé vers le bas, afin que le sens positif des angles soit le sens trigonométrique.

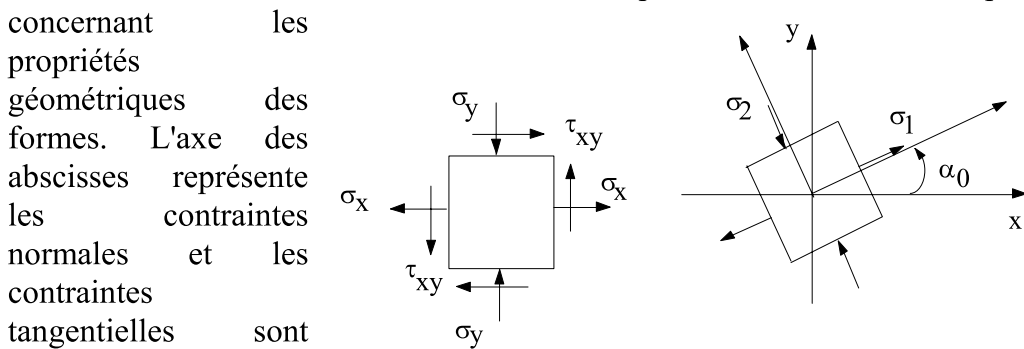


Fig. 4.5

Le cercle de Mohr peut être positionné sur le plan (σ, τ) en connaissant l'état de contrainte en un point défini par σ_x, σ_y et τ_{xy} et de l'utiliser pour déterminer graphiquement les contraintes principales σ_1 et σ_2 . Dans ce cas on fixe deux points $A(\sigma_x, \tau_{xy})$ et $B(\sigma_y, -\tau_{xy})$ sur le plan (σ, τ) et on prend le segment AB qui coupe l'axe σ en C comme le diamètre du cercle de Mohr ayant son centre en C. Les points d'intersection de la circonférence avec l'axe σ déterminent les contraintes σ_1 et σ_2 . L'angle entre AC et l'axe σ est égal à $2\alpha_0$.

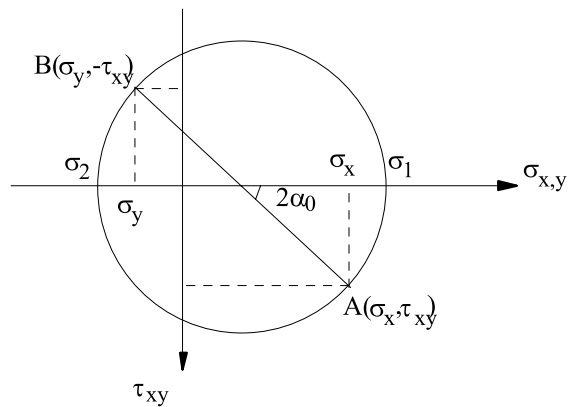


Fig. 4.5

Le problème indirect consiste à construire le cercle de Mohr à partir de l'état de contrainte principal et de déterminer ensuite n'importe quel état de contrainte orienté d'un angle α .

4.5 RELATIONS ENTRE CONTRAINTES ET DEFORMATION

Considérons une barre constituée d'un matériau homogène et isotrope sollicité par des forces axiales (Fig. 4.6).

En supposant que l'hypothèse de Bernoulli est valable, alors toutes les fibres d'un élément de longueur L s'allongent d'une longueur ΔL et leurs allongements relatifs ε sont définis par:

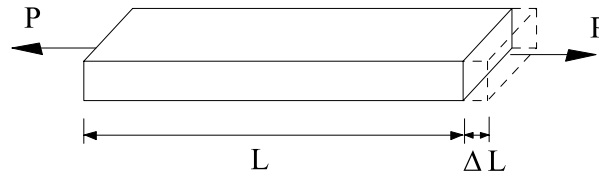


Fig. 4.6

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \text{constante} \tag{4-31}$$

La relation contrainte-déformation est définie par la loi de Hooke qui traduit la dépendance linéaire des déformations par rapport aux contraintes:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{ou} \quad \sigma = E\varepsilon \tag{4-32}$$

Où E est le coefficient de proportionnalité appelé module d'élasticité ou module d'Young.

E a la dimension d'une contrainte [N/mm^2] et représente une des constantes caractéristiques mécanique du matériau.

Comme σ_x conduit à l'apparition de la déformation relative ε_x , il en est de même pour les contraintes tangentielles τ_{xy} qui engendrent des déformations relatives γ_{xy} . Si on considère maintenant un élément de volume unitaire soumis à l'action de la contrainte τ_{xy} , le déplacement de la facette x le long de l'axe y provoque une distorsion des facettes z , faisant ainsi varier l'angle droit de γ_{xy} comme le montre la Fig. 4.7

La relation entre la contrainte tangentielle et la déformation relative γ_{xy} est exprimée par la loi de Hooke pour le cisaillement par:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \tag{4-33}$$

Où G est le coefficient de proportionnalité qu'on appelle module d'élasticité transversal qui a les dimensions d'une contrainte.

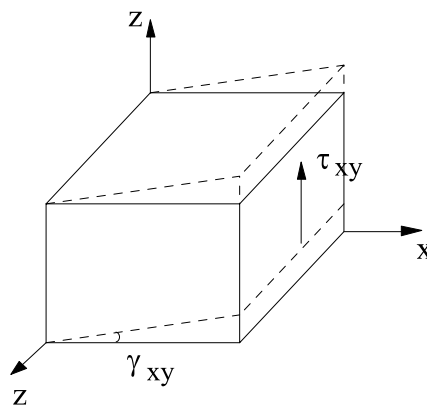


Fig. 4.7

4.5.1 Loi de Hooke généralisée

La loi de Hooke généralisée traduit les relations linéaires entre contraintes et déformations dans le cas tridimensionnel.

Considérons d'abord les déformations normales ϵ_x , ϵ_y et ϵ_z de l'élément de volume unitaire de la Fig. 4.8. Ces déformations peuvent être exprimées en termes des contraintes normales par superposition de leurs efforts.

Chaque contrainte normale provoque selon son axe d'application une déformation relative ϵ proportionnelle à la contrainte σ :

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (4-34)$$

et suivant les deux autres axes, des déformations relatives

$$\epsilon' = -\nu \frac{\sigma}{E} \quad (4-35)$$

et

$$\epsilon'' = -\nu \frac{\sigma}{E} \quad (4-36)$$

ν est le coefficient de Poisson, sans dimension ($0 \leq \nu \leq 0.5$)

Donc la déformation relative suivant chaque axe est la somme de la déformation relative due à la contrainte suivant cet axe et celles provoquées par les contraintes selon les deux autres axes perpendiculaires.

D'où

$$\epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \nu \frac{\sigma_y}{E} - \nu \frac{\sigma_z}{E} = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad (4-37)$$

De même pour

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \quad (4-38)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \quad (4-39)$$

Il faut noter que les contraintes tangentielles ne provoquent qu'une distorsion angulaire:

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (4-40)$$

Ces équations représentent la loi de Hooke généralisée caractérisée par les constantes élastiques E , G et ν . Un matériau élastique, isotrope, est

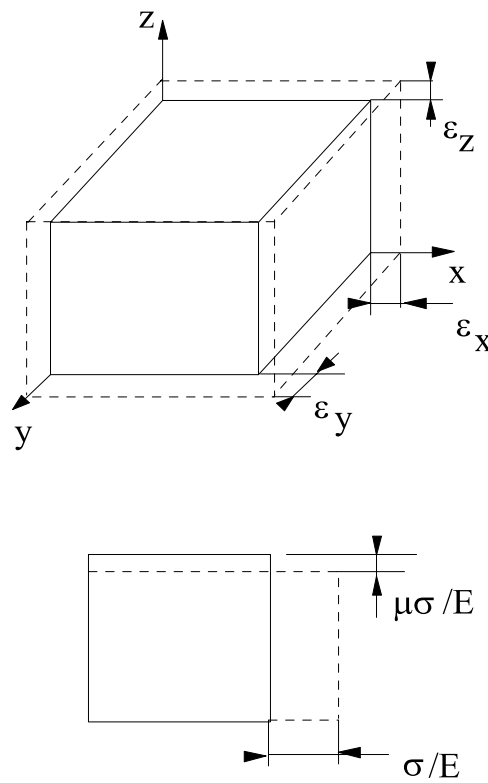


Fig. 4.8

complètement défini par E et ν car il existe une relation entre les trois paramètres définie par:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (4-41)$$

Le module d'élasticité E est une caractéristique de la rigidité du matériau. Il représente sa capacité à s'opposer à la déformation. Quelques valeurs typiques de E pour certains matériaux sont données dans le tableau suivant:

Matériaux	E (N/mm²)
Caoutchouc	8.
Plastique, Polythene, Nylon	1400.
Bois (le long des fibres)	14000.
Béton (200)	23000.
Verre ordinaire	70000.
Aluminium allié	70000.
Aciers alliés	210000.
Diamant	12000000.

Variation d'un volume unitaire

La variation d'un volume unitaire $V_0 = 1 \times 1 \times 1$ d'un point d'un corps soumis à des contraintes normales peut être écrite comme:

$$\Delta V = V_f - V_0 = (1 + \varepsilon_x)(1 + \varepsilon_y)(1 + \varepsilon_z) - 1 \quad (4-42)$$

V_f : volume de l'élément après déformation

V_0 : volume initial de l'élément

En négligeant les termes faisant intervenir le produit des petites quantités :

$$e = \frac{\Delta V}{V_0} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (4-43)$$

4.6 EQUATIONS DE TRANSFORMATION DES DEFORMATIONS

Les équations de transformation des déformations planes $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ définies dans un repère XOY en fonction des déformations ε_α et γ_α exprimées dans un repère X_1OY_1 orienté d'un angle α par rapport à XOY sont données par:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha &= \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha \\ \frac{\gamma_\alpha}{2} &= -\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \sin 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cos 2\alpha\end{aligned}\quad (4-44)$$

L'analogie qui existe entre ces équations et celles des transformations des contraintes planes est définie par :

$$\begin{aligned}\sigma_x &\rightarrow \varepsilon_x \\ \sigma_y &\rightarrow \varepsilon_y \\ \tau_{xy} &\rightarrow \frac{\gamma_{xy}}{2}\end{aligned}$$

Ainsi toutes les propriétés des transformations des contraintes planes sont applicables à celles des déformations. En particulier les déformations principales:

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (4-45)$$

et l'orientation des déformations principales:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \quad (4-46)$$

ainsi que les déformations angulaires maximales:

$$\frac{\gamma_{\max}}{2} = \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \quad (4-47)$$

Le principe du cercle de Mohr est valable pour la représentation géométrique des déformations en respectant l'analogie entre les contraintes et les déformations. Ainsi les coordonnées des points A et B deviennent:

$$A\left(\varepsilon_x, \frac{\gamma_{xy}}{2}\right) \quad \text{et} \quad B\left(\varepsilon_y, -\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)$$

4.7 MESURE DES DEFORMATIONS: EXTENSIOMETRIE ELECTRIQUE

Il existe plusieurs méthodes de mesure des déformations (mécanique, électrique ou optique). On se limitera ici à la méthode de l'extensiométrie électrique par jauges de déformations qui consiste à déterminer les déformations longitudinales à l'aide d'une jauge électrique. Une jauge électrique est une résistance électrique constituée d'un fil métallique replié en brins parallèles et fixé sur un support isolant et de rigidité négligeable. Ce support est collé avec soin sur la surface de l'élément à étudier. La déformation du fil métallique induit alors une variation de la résistance électrique R de la jauge qui, mesuré par une

technique appropriée à l'aide d'un pont Weastone, permet de remonter aux déformations et plus précisément, sous réserve que l'influence de l'allongement transversal et du glissement soit négligeable, à l'allongement dans la direction longitudinale de la jauge.

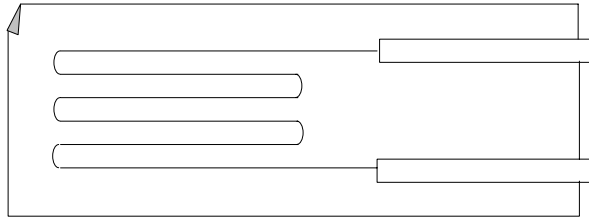


Fig. 4.9

Ces jauges sont extrêmement sensibles et peuvent détecter des déformations de l'ordre de 10^{-6} . Une jauge permet de mesurer l'allongement relatif suivant une seule direction, il est donc souvent nécessaire d'utiliser trois jauges pour effectuer 3 mesures suivant trois directions différentes pour pouvoir déterminer l'état de déformation en un point de la surface à étudier. L'ensemble des trois jauges disposées suivant une géométrie précise est appelée rosette.

Dans la pratique on place les 3 jauges de telle façon que les angles qui les séparent soient des valeurs simples (45° , 60° , 120°).

A l'aide d'une rosette à 45° , fixée en un point d'un élément, on mesure les déformations relatives ε_a , ε_b et ε_{45} suivant les axes x , y et l'axe orienté à 45° respectivement.

Pour définir complètement l'état de déformation dans ce point on doit déterminer γ_{xy} . On utilise donc l'équation de transformation suivante:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cos 2\alpha + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 2\alpha \quad (4-48)$$

pour $\alpha = 45^\circ$ on a:

$$\varepsilon_\alpha = \varepsilon_b$$

$$\Rightarrow \varepsilon_b = \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \frac{\varepsilon_a - \varepsilon_c}{2} \cos 90 + \frac{\gamma_{xy}}{2} \sin 90 \quad (4-49)$$

$$\Rightarrow \gamma_{xy} = 2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c$$

4.8 APPLICATIONS

Exemple 1

Les mesures des jauges d'une rosette à 45° fixé en un point d'une structure sont les suivantes:

$$\begin{aligned}\varepsilon_a = \varepsilon_x &= 280 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_c = \varepsilon_y &= -160 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_b &= 190 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Déterminer les déformations principales en ce point.

Solution

On calcule à l'aide de l'eq.(4-50) la déformation angulaire:

$$\gamma_{\max} = [2 \times 190 - 280 - (-160)] \times 10^{-6} = 260 \times 10^{-6}$$

en remplaçant dans l'eq.(4-45) les valeurs des déformations ε_x , ε_y et γ_{xy} on obtient:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= 316 \times 10^{-6} \\ \varepsilon_2 &= -196 \times 10^{-6}\end{aligned}$$

Exemple 2

Une plaque rectangulaire en acier ayant les dimensions $L = 800$ mm, $b = 400$ mm et $t = 20$ mm est sollicitée par des contraintes normales $\sigma_x = 60$ N/mm² et $\sigma_y = -18$ N/mm². Sachant que $E = 2.10^5$ N/mm² et $\nu = 0.3$ déterminer la déformation Δt et la variation du volume ΔV .

Solution

$$\begin{aligned}\frac{\Delta t}{t} = \varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y), \text{ car } \sigma_z = 0 \\ &= -\frac{0.3}{2.10^5}(60 - 18) = -6.3 \times 10^{-5} \text{ mm}\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta b}{b} + \frac{\Delta t}{t} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

$$\frac{\Delta b}{b} = \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_x = 0.5 \times 10^{-5}[-18 - 0.3 \times 60] = -1.8 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \frac{\nu}{E}\sigma_y = 0.5 \times 10^{-5}[60 + 18 \times 0.3] = 3.27 \times 10^{-4}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = (3.27 - 1.8 - 0.63) \times 10^{-4} = 0.84 \times 10^{-4}$$

$$\Delta V = 400 \times 800 \times 20 \times 0.84 \times 10^{-4} = 537.6 \text{ mm}^3$$

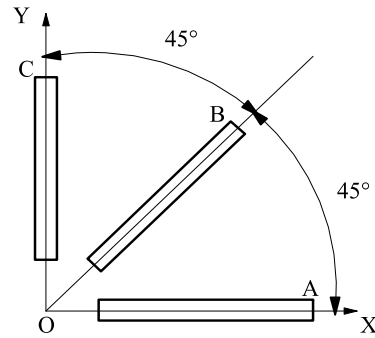


Fig. 4.10

EXERCICES / chapitre 4

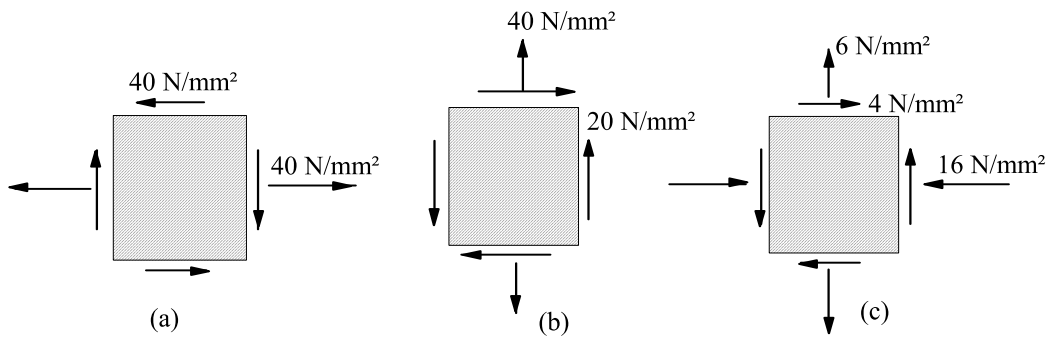


Fig. E4.1

4.1 Les états de contraintes de quelques points d'un corps chargé sont représentés sur la Fig. E4.1. Déterminer les contraintes principales, l'orientation des axes principaux, l'intensité et l'orientation des contraintes tangentielles maximales et leurs contraintes normales associées. Pour chaque cas schématiser les résultats sur un élément proprement orienté.

✓ 28.8, 8.2, 25.45, ±10.30, -19.54, 18.5

- ✓ (a) 64.72, (b) 48.28, (c) 6.7
- 24.72, -8.28, -16.70
- 31.71, -22.5, -9.99
- ±44.72, ±28.28, ±11.70
- 13.28, 22.5, 35.00
- 20.0, 20.0, -5.0

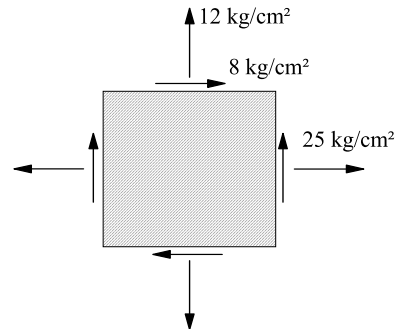


Fig. E4.2

4.2 Un cas de charge appliqué à une structure produit un état de contrainte en un point schématisé ci-contre (Fig. E4.2).

4.3 On considère l'état de contraintes plan de la Fig. E4.3.

- 1) Déterminer les contraintes principales et leurs orientations.
- 2) Déterminer les contraintes tangentielles maximales, leurs orientations et la contrainte associée.
- 3) Peut-on obtenir une facette de cisaillement pur? Si oui déterminer l'orientation de cette facette.

1. Tracer le cercle de Mohr et calculer les contraintes principales. Déterminer les directions principales dans le plan de contraintes.

2. On veut éviter toute contrainte de traction, définir la valeur de σ_y strictement nécessaire.

3. On désire réduire davantage le diamètre du cercle de Mohr, soit $D = 400 \text{ N/mm}^2$; déterminer les contraintes principales nécessaires, de telle sorte que les directions de deux d'entre elles restent dans le plan initial, et sachant que les contraintes σ_x et τ_{xy} restent inchangées.

✓ 450 N/mm^2 , -50 N/mm^2 , -18.05° ,
 56.25 N/mm^2 , 467.71 N/mm^2 ,
 67.71 N/mm^2

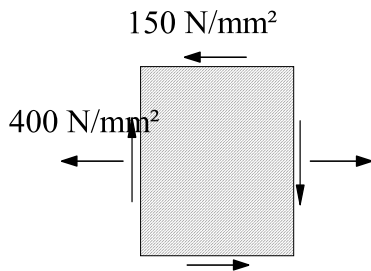


Fig. 4.3

4.4 Un point d'une structure soumise à un chargement est défini par l'état de contrainte représenté par l'élément A sur la Fig. E4.4. L'élément B représente le même point mais orienté d'un angle α_1 . Calculer la contrainte normale σ_{y1} et l'angle d'orientation α_1 .
 ✓ 30 N/mm^2 , 33.7°

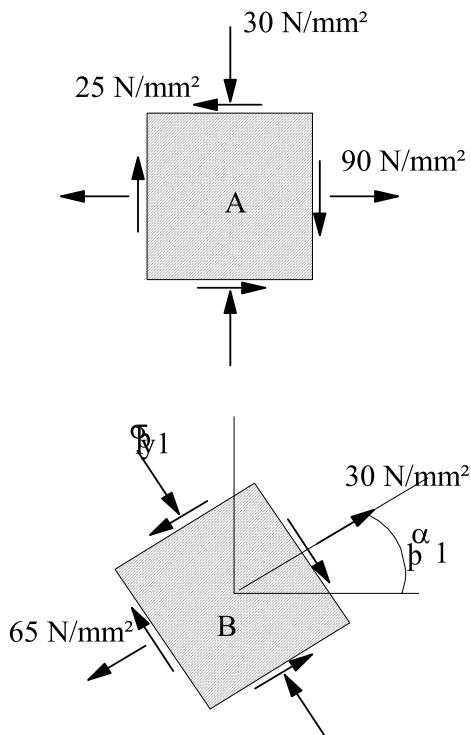


Fig. E4.4

4.5 Résoudre l'exercice 4.4 en utilisant la méthode graphique (Cercle de Mohr).

4.6 Un corps est soumis à un système de forces et de moments. Chaque système produit un état de contrainte en un point montré sur la Fig. E4.6. Déterminer les contraintes principales et leurs orientation dans ce point sous l'effet du chargement combiné.

✓ 51.96 N/mm^2 , -51.96 N/mm^2 , -30° .

4.7 Un élément unitaire sur un corps sollicité par des forces extérieures subit les déformations suivantes:

$$\epsilon_x = 230 \times 10^{-6}, \quad \epsilon_y = 510 \times 10^{-6}, \quad \text{et} \\ \gamma_{xy} = 180 \times 10^{-6}.$$

Calculer les déformations d'un élément orienté de 40° .

✓ 434.3×10^{-6}

4.8 Une jauge électrique en rosette à 45° est attachée à la base d'un poteau de portique soumis à un test statique. Sous l'effet du chargement on mesure les déformations suivantes:

jauge A, 530×10^{-6} , jauge B, 420×10^{-6} , jauge C, 80×10^{-6} . Déterminer les déformations principales et les déformations angulaires maximales.

✓ 316×10^{-6} , -196×10^{-6} , 511×10^{-6}

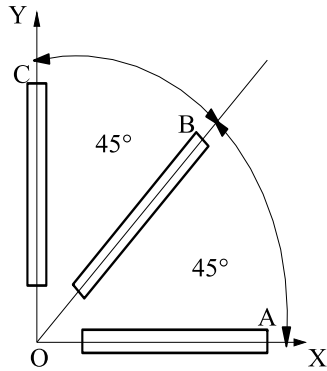


Fig. E4.8

4.9 Une plaque rectangulaire mince en acier est soumise à des contraintes normales uniformes σ_x et σ_y . On mesure les déformations relatives $\varepsilon_x = 0.001$ et

$\varepsilon_y = -0.0007$ respectivement suivant x et y à l'aide d'une jauge électrique attachée au point A comme l'indique la Fig. E4.9. Sachant que $E = 2.07 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ et le coefficient de Poisson $\nu = 0.3$, déterminer les contraintes σ_x et σ_y .

✓ $179.1 \text{ N/mm}^2, -90.95 \text{ N/mm}^2$

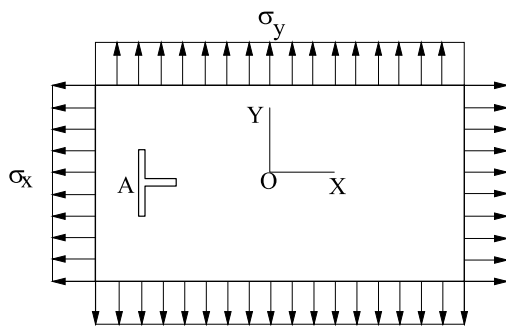


Fig. 4.9