

Chapitre 3

EFFORTS INTERNES

3.1 GENERALITES

On appelle forces extérieures ou charges les forces appliquées connues sur une structure donnée. Suivant le cas, ces charges peuvent être réparties avec une densité donnée de volume (poids propre d'une structure) ou concentrées en un certain nombre de points. Dans cette catégorie de forces extérieures figurent aussi les réactions d'appuis.

Sous l'effet de ces charges, les forces entre les particules d'un corps (élément) en équilibre varient. En Résistance des Matériaux, on appelle souvent cette variation des forces *efforts internes*.

Afin de faciliter l'étude des efforts exercés sur chaque particule matérielle on considère une section transversale d'un élément soumis à une sollicitation (Fig. 3.1). Tout comme n'importe quel système de forces, les efforts intérieurs répartis sur toute la section peuvent être rapportés à un point (par exemple le centre de gravité de la section), et de ce fait on distingue le vecteur force $F(N, T_z, T_y)$ et le vecteur moment $M(M_x, M_y, M_z)$ résultant des forces intérieures dans la section. Il convient d'adopter les dénominations suivantes pour les forces et moments agissant dans une section.

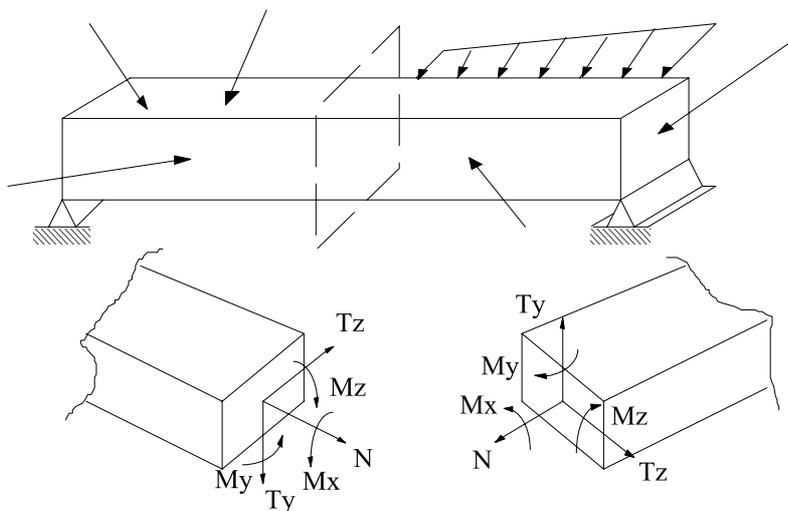


Fig. 3.1

3.1.1 Effort Normal

La composante N de la résultante F représente la somme des projections de toutes les forces intérieures agissant suivant la normale de la section (ou suivant l'axe longitudinal de l'élément). L'effort normal provoque une déformation longitudinale de l'élément. N est considéré positif s'il s'agit d'une traction et négatif dans le cas contraire.

3.1.2 Efforts tranchants

Les forces transversales T_z et T_y sont les sommes des projections de toutes les forces intérieures dans la section sur les axes centraux principaux de cette dernière. Ces efforts tranchants provoquent le cisaillement des bords de la section respectivement dans la direction des axes Z et Y . Le sens de T sur le plan est positif par convention quand il tend à faire tourner un élément entre deux sections dans le sens des aiguilles d'une montre comme indiqué sur la Fig. 3.2.

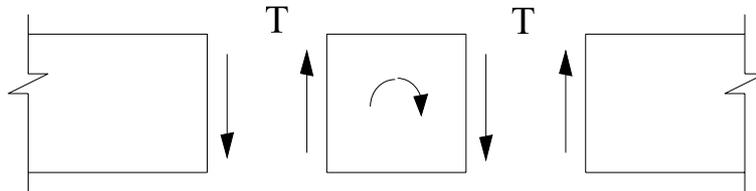


Fig. 3.2

3.1.3 Moments Fléchissants

Les composantes M_y et M_z du vecteur moment résultant représentent les sommes des moments de toutes les forces intérieures dans la section, par rapport aux axes d'inertie principaux de cette dernière Y et Z respectivement. La Fig. 3.3 indique le sens positif des moments dans le plan qui par convention tend les fibres inférieures et comprime les fibres supérieures de la section.

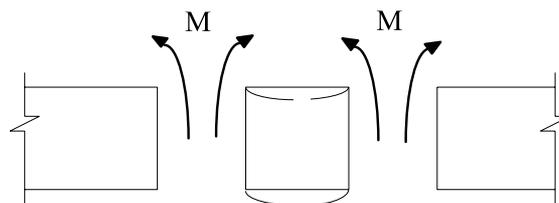


Fig. 3.3

3.1.4 Moment de torsion

le moment de torsion M_x (ou M_t) est la somme des moments de toutes les forces intérieures dans la section par rapport à l'axe de la barre X . Le moment de torsion est positif lorsqu'il tend à tourner la section dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (sens trigonométrique) en regardant la section du côté de la normale extérieure (Fig. 3.4)

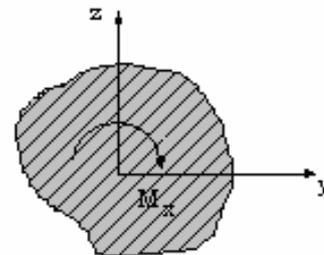


Fig. 3.4

3.2 METHODE DES SECTIONS

Pour déterminer les forces intérieures qui apparaissent dans un élément soumis à une sollicitation, on se sert, en résistance des matériaux, de la méthode des sections.

Cette méthode est basée sur le fait que si un élément est en équilibre, sous l'action des forces extérieures, alors n'importe quelle partie de cet élément sous l'action des forces qui lui sont appliquées, est équilibré par un système de forces intérieures agissant dans la section.

On considère l'élément AB plan, soumis à l'action d'un système de forces extérieures (Fig. 3.5). Pour calculer les efforts et moments dans n'importe quelle section, on coupe à l'endroit voulu l'élément AB en deux parties. Les valeurs numériques des efforts N , T , et M sont égaux aux sommes algébriques des projections et des moments des forces extérieures agissant sur une des parties (gauche ou droite) de l'élément sectionné, généralement sur celle où les projections et moments se calculent plus facilement.

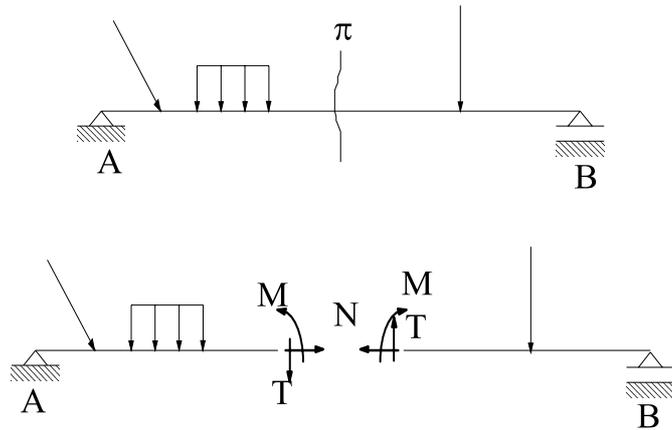


Fig. 3.5

3.3 DIAGRAMMES DES EFFORTS ET DES MOMENTS

En général, les efforts et moments agissant dans différentes sections varient le long de la poutre. Entre autres les valeurs maximales et minimales de ces efforts et moments sont d'une grande importance pour la sécurité de la poutre, on s'intéresse donc à tracer des courbes qui montrent comment changent les efforts et les moments d'une section à une autre, on appelle ces courbes les diagrammes des efforts et des moments.

On se limite dans cette section à l'étude des diagrammes des efforts et des moments dans les poutres à deux dimensions (plan XOY), ce qui réduit le nombre des efforts et des moments à trois, à savoir un effort normal N , un effort tranchant T_y , et un moment fléchissant M_z .

3.3.1 Les zones des efforts internes dans une poutre

La variations d'un effort ou moment dans une zone (ou tronçon) d'une poutre est caractérisé par une même loi mathématique. En pratique l'extrémité d'une zone est imposée par l'extrémité de la poutre (extrémité libre appuis de rive ou intermédiaire), changement brutal de la charge, ou le changement brutal de la direction de l'axe de la poutre (Fig. 3.6).

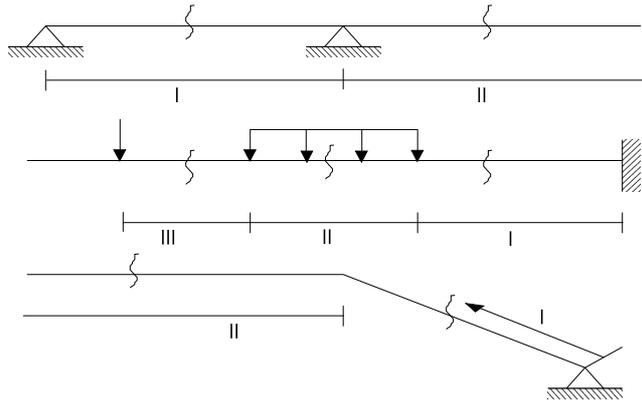


Fig. 3.6

3.3.2 Relations différentielles entre les charges et les efforts

Ils existent des relations différentielles entre les forces extérieures et intérieures et qui constituent la base de la méthode directe pour la détermination des efforts internes.

Pour déterminer ces relations on considère un cas de charge arbitraire d'un système de sollicitations donné dans un plan (Fig. 3.7) avec:

q_x : intensité de la charge extérieure selon l'axe X

q_y : intensité de la charge extérieure selon l'axe Y

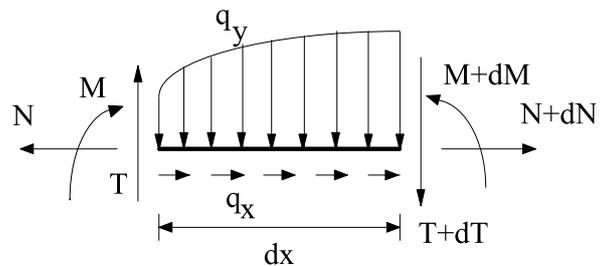


Fig. 3.7

La relation entre l'intensité de la charge q_x et l'effort normal est obtenue par l'équation d'équilibre d'un élément dx et peut être exprimée par:

$$N - q_x(x)dx - N - dN = 0$$

$$\Rightarrow dN/dx = -q_x(x)$$

Entre l'intensité q_y , l'effort tranchant T et le moment fléchissant M qui agissent dans une certaine section, existent les relations différentielles suivantes:

$$T - q_y(x)dx - T - dT = 0$$

$$\Rightarrow dT/dx = -q_y(x)$$

$$M + Tdx - q_y(x)dx^2/2 - M - dM = 0$$

en négligeant le terme quadratique en dx^2 on obtient:

$$dM/dx = T$$

où

$$d^2M/dx^2 = -q_y$$

3.3.3 Construction des diagrammes des efforts internes d'une poutre

Pour pouvoir tracer les diagrammes, il est indispensable de connaître toutes les forces extérieures y compris les réactions qui doivent être préalablement déterminées.

Pour déterminer les réactions d'une poutre isostatique (efforts de liaison), il faut écrire les conditions d'équilibre (la loi fondamentale de la statique).

Pour une poutre articulée isostatique, aux trois équations fondamentales de la statique s'ajoute une équation supplémentaire: en effet par rapport au centre de l'articulation, la somme des moments créés par toutes les forces situées d'un côté de cette dernière est nulle

Le tracé des diagrammes des efforts et des moments peut être fait à l'aide des équations analytiques ou par la méthode directe.

La méthode analytique consiste à trouver les expressions des efforts et moment pour chaque zone en fonction de l'abscisse x de la ligne moyenne de la poutre. Ces expressions peuvent être établies par les équations d'équilibre de toutes les forces (y compris les réactions des appuis) appliquées à gauche ou à droite de la section considérée. Une fois que ces expressions sont déterminées, on peut alors tracer leurs diagrammes.

La méthode directe est très rapide généralement utilisée dans les cas de chargements simples. Elle consiste à déterminer les valeurs numériques des efforts intérieurs aux extrémités de chaque tronçon. Ces points sont joints par des lignes ou courbes dont les caractéristiques sont déterminées sur la base des relations différentielles entre les efforts intérieurs et les forces extérieures citées ci-dessous.

a) Sur les tronçons où il n'y a pas de charge répartie, le diagramme des T est délimité par des droites parallèles à la base tandis que le diagramme des M l'est, dans le cas le plus général, par des droites obliques.

b) Sur les tronçons où la poutre supporte une charge répartie, le diagramme des T est délimité par des droites obliques tandis que celui des M l'est par des paraboles carrées. Quand on trace le diagramme des M du côté des fibres tendues, l'incurvation de la parabole est dirigée dans le sens contraire de la charge q_y .

c) Les maximums et minimums des M coïncident avec les sections où $T=0$.

d) Dans les sections où les charges concentrées sont appliquées à la poutre, le diagramme des T est caractérisé par des passages brusques aux niveaux de ces charges, celui des M , il y aura des brisures dont la pointe sera dirigée dans le sens de la ligne d'action de la force.

e) Dans les sections où des moments concentrés sont appliqués à la poutre, le diagramme des moments sera marqué par des passages brusques d'une valeur proportionnelle à ces moments tandis que sur le diagramme des T , il n'y aura aucune modification.

3.3.4 Tracé des diagrammes pour des portiques isostatiques

On appelle *portique* les systèmes de poutres reliées entre elles par des noeuds rigides (Fig. 3.8). Il est convenu d'appeler les *poteaux* ou *montants* les éléments verticaux ou inclinés d'un portique, tandis que ceux longitudinaux, *poutres* ou *traverses*.

Ces assemblages trouvent une large application dans le domaine du génie civil. Ils sont très utilisés comme systèmes de base dans les constructions telles que les bâtiments et les hangars. Généralement les portiques sont des systèmes hyperstatiques, mais on se limitera ici à l'étude des portiques isostatiques.

Les règles de construction des diagrammes sont celles utilisées dans le cas de poutres simples, car chaque élément du portique est considéré ainsi. Les conventions de signe préalablement établies restent valables; les ordonnées positives des N et des T sont portés de façon à être dirigées vers le côté extérieur, les diagrammes des moments positifs sont tracés du côté des fibres tendues.

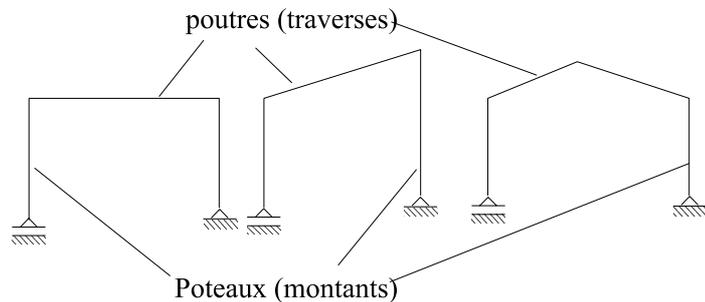


Fig. 3.8

3.3.5 Tracé des diagrammes pour poutres curvilignes (arcs)

Pour des raisons esthétiques ou de résistance, on utilise des éléments structurels ayant des formes curvilignes (ou en arcs). Dans cette section, on suppose que l'axe de la poutre curviligne représente un arc de cercle. Pour déterminer les expressions analytiques des efforts internes de ces éléments, on utilise la méthode des sections et on écrit les équations d'équilibre pour une section donnée en projetant les forces suivant l'axe parallèle à l'effort normal N et l'axe perpendiculaire à ce dernier. La somme des moments de toutes les forces est calculée par rapport au centre de gravité de la section pour l'expression de M. On note aussi qu'il est commode d'utiliser un système de coordonnées polaires pour parcourir la ligne moyenne de l'élément.

3.4 APPLICATIONS

3.4.1 Exemple 1: poutre simple rectiligne

Soit une poutre simplement appuyée (Fig. 3.9), soumise aux cas de charges suivants:

Une force P concentrée à mi-travée.

La force P est uniformément répartie sur toute la longueur, soit $q = P/L$.

La force P est triangulairement répartie sur la longueur, soit $q = 2P/L$.

Tracer les diagrammes des efforts internes et comparer les moments maximaux.

a) cas d'une force concentrée à mi-travée

Détermination des réactions:

$$\Sigma M/A = 0 \Rightarrow V_B = 0.5 P$$

$$\Sigma F \uparrow = 0 \Rightarrow V_A = 0.5 P$$

Expressions des efforts internes:

Tronçon I: $0 \leq x \leq L/2$

$$N = 0$$

$$T - 0.5P = 0 \Rightarrow T = 0.5P$$

$$M - 0.5P x = 0 \Rightarrow M = 0.5P x$$

$$M(0) = 0, \quad M(L/2) = PL/4$$

Tronçon II: $L/2 \leq x \leq L$

$$N = 0$$

$$T + P - 0.5P = 0 \Rightarrow T = -0.5P$$

$$M - 0.5P x + P(x - L/2) = 0$$

$$\Rightarrow M = 0.5P x - P(x - L/2)$$

$$M(0) = 0, \quad M(L) = 0, \quad M_{\max} = M(L/2) = PL/4 = 0.25 PL$$

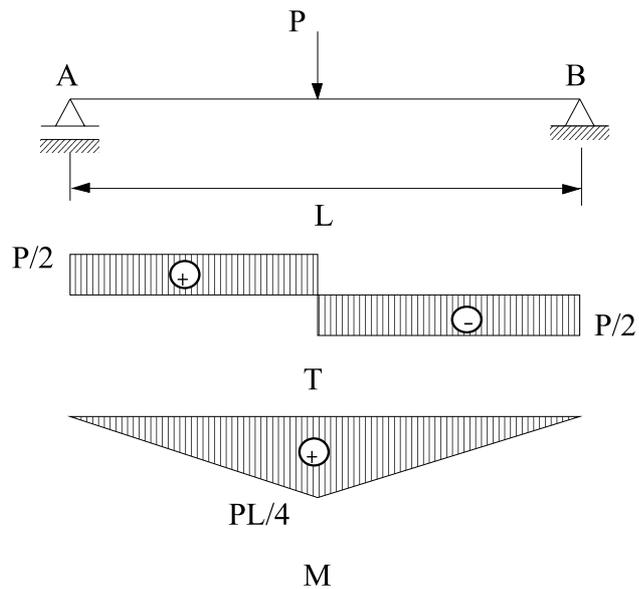


Fig. 3.9

b) Cas d'une charge uniformément répartie $q = P/L$

Détermination de réactions:

$$\Sigma M/A = \Rightarrow V_B L - (P/L)L(L/2) = 0$$

$$\Rightarrow V_B = 0.5P$$

$$\Sigma F \uparrow = 0 \Rightarrow V_A + V_B - (P/L)L = 0$$

$$\Rightarrow V_A = 0.5P$$

Expressions des efforts internes:

$$N = 0$$

$$T - 0.5P + (P/L)x = 0$$

$$\Rightarrow T = 0.5P - (P/L)x$$

$$T(0) = 0.5P, \quad T(L) = -0.5P$$

et $T(x) = 0 \Rightarrow x = L/2$

$$M - 0.5Px + (P/L)x^2/2 = 0$$

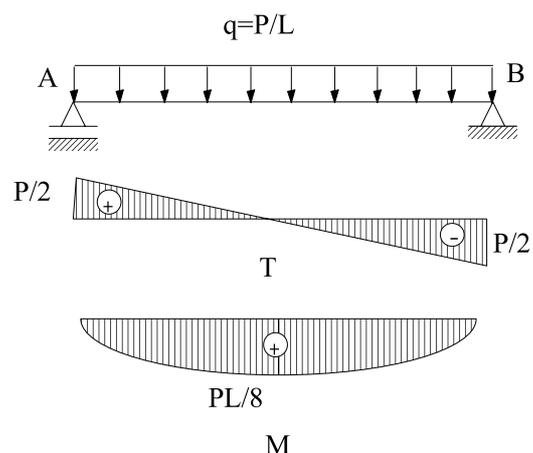


Fig. 3.10

$$\Rightarrow M = 0.5Px - (P/2L) x^2$$

$$M(0) = 0, M(L) = 0,$$

$$M_{\max} = M(L/2) = PL/8 = 0.125 PL$$

c) Cas d'une charge triangulairement répartie $q = 2P/L$

Détermination de réactions:

$$\Sigma M/A = \Rightarrow V_B L - q(L/2)(2L/3) = 0 \Rightarrow V_B = qL/3 = (2/3)P$$

$$\Sigma F \uparrow = 0 \Rightarrow V_A + V_B - qL/2 = 0 \Rightarrow V_A = qL/6 = P/3$$

Expressions des efforts internes:

$$N = 0$$

$$T - \frac{P}{3} + q \times \frac{x}{L} \times \frac{x}{2} = 0$$

$$\Rightarrow T = \frac{P}{3} - \frac{qx^2}{2L} \Rightarrow T = \frac{P}{3} - \frac{Px^2}{L^2}$$

$$T(0) = P/3, T(L) = -2P/3$$

$$T(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

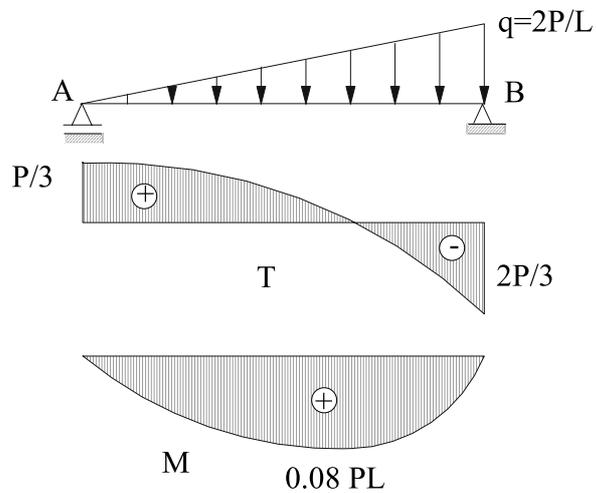


Fig. 3.11

$$M - \frac{P}{3}x + q \times \frac{x}{L} \times \frac{x}{2} \times \frac{x}{3} = 0 \Rightarrow M = \frac{P}{3} - \frac{qx^3}{6L} \Rightarrow M = \frac{P}{3}x - \frac{Px^3}{3L^2}$$

$$M(0) = 0, M(L) = 0, M_{\max} = M\left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right) = 0.08 PL$$

3.4.2 Exemple 2: Portique simple isostatique

Tracer le diagramme des efforts internes du portique représenté sur la Fig. 3.12.

Le portique se compose de 2 tronçons. Pour écrire les expressions des efforts internes on commence par l'extrémité libre C.

Tronçon BC: $0 \leq x \leq L$

$$N = -P$$

$$T = qx = Px/L$$

$$T(0) = 0 \text{ et } T(L) = P$$

$$M = -qx^2/2 = -Px^2/2L$$

$$M(0) = 0 \text{ et } M(L) = -PL/2$$

Tronçon AB: $0 \leq x \leq L$

$$N = -P$$

$$T = -P$$

$$M = Px - PL/2$$

$$M(0) = -PL/2, \quad M(L) = PL/2$$

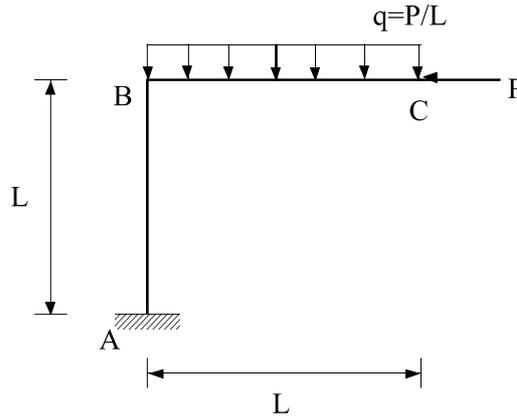


Fig. 3.12

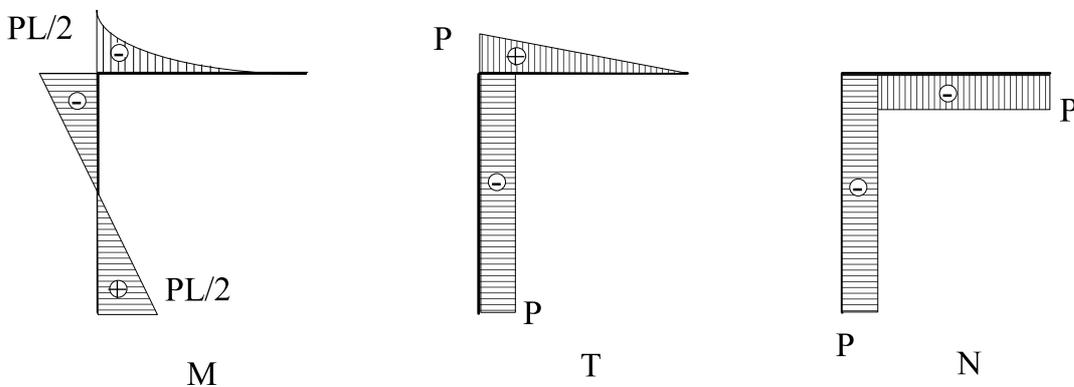


Fig. 3.12

3.4.3 Exemple 3: poutre simple curviligne

Tracer les diagrammes des efforts internes de la poutre curviligne en quart de cercle sous les cas de charges indiqués sur la Fig. 3.13.

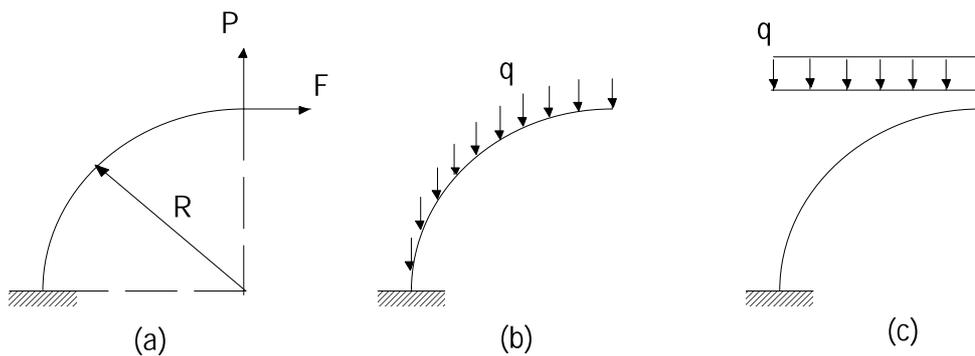


Fig. 3.13

(a) Forces concentrées:

Pour déterminer les expressions de N et T, on projette les forces concentrées suivant les axes de N et T. L'expression de M est la somme des moments de toutes les forces par rapport à ce point.

$$0 \leq \theta \leq 90$$

$$N(\theta) = F \cos\theta + P \sin\theta$$

$$N(0) = F, \quad N(90) = P$$

$$T(\theta) = F \sin\theta - P \cos\theta$$

$$T(0) = -P, \quad T(90) = F$$

$$\text{et } T(\alpha) = 0 \Rightarrow \text{tg}\alpha = P/F$$

$$M(\theta) = FR (1 - \cos\theta) - PR \sin\theta$$

$$M(0) = 0, \quad M(90) = (F-P)R$$

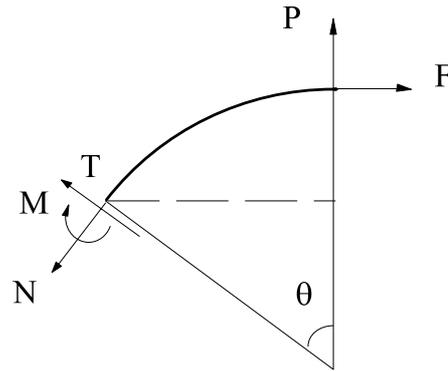


Fig. 3.14

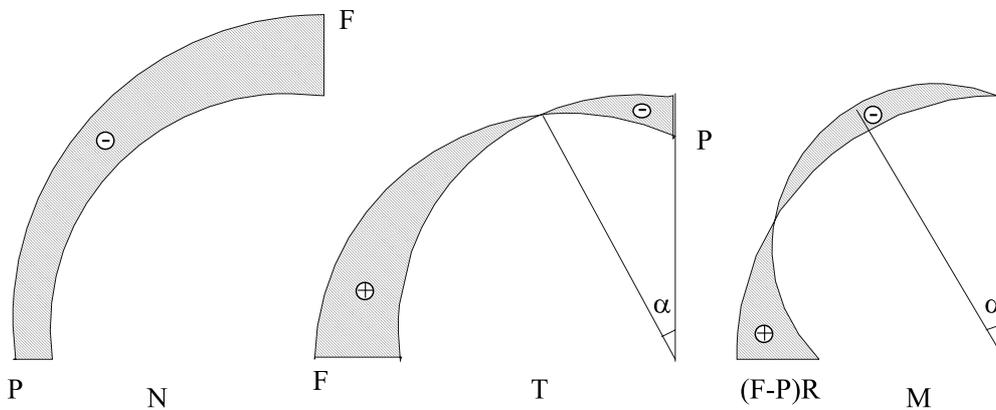


Fig. 3.15

(b) Charge uniformément répartie sur l'arc:

La résultante d'une charge uniformément répartie sur l'arc suivant une seule direction est égale au produit de l'intensité de la charge par la longueur de l'arc passant par son milieu et dirigée suivant l'orientation de la charge.

La longueur de l'arc faisant un angle α est $dL = R d\alpha$

et la force élémentaire : $dP = q dL = qR d\alpha$

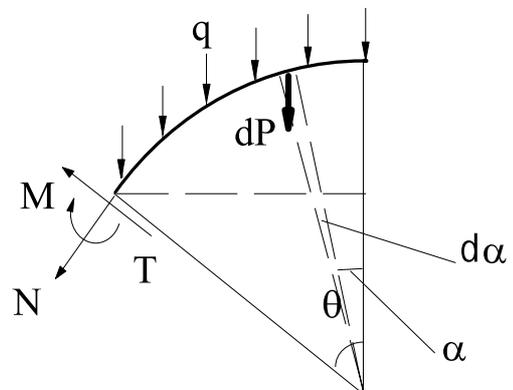


Fig. 3.16

Pour $0 \leq \theta \leq 90$ on écrit les expressions de N, T et M

$$dN(\theta) = -dP \sin\theta = qR \sin\theta d\alpha$$

$$N(\theta) = -qR \sin\theta \int_0^\theta d\alpha = -qR\theta \sin\theta$$

$$N(0) = 0, \quad N(90) = -\pi qR/2$$

$$dT(\theta) = dP \cos\theta = qR \cos\theta \int_0^\theta d\alpha = qR\theta \cos\theta$$

$$T(0) = 0, \quad T(90) = 0$$

$$dM(\theta) = -dPR(\sin\theta - \sin\alpha) = -qR^2(\sin\theta - \sin\alpha)d\alpha$$

$$M(\theta) = -qR^2 \int_0^\theta (\sin\theta - \sin\alpha)d\alpha = -qR^2(\theta\sin\theta + \cos\theta - 1)$$

$$M(0) = 0, \quad M(90) = -(\pi/2 - 1)qR^2$$

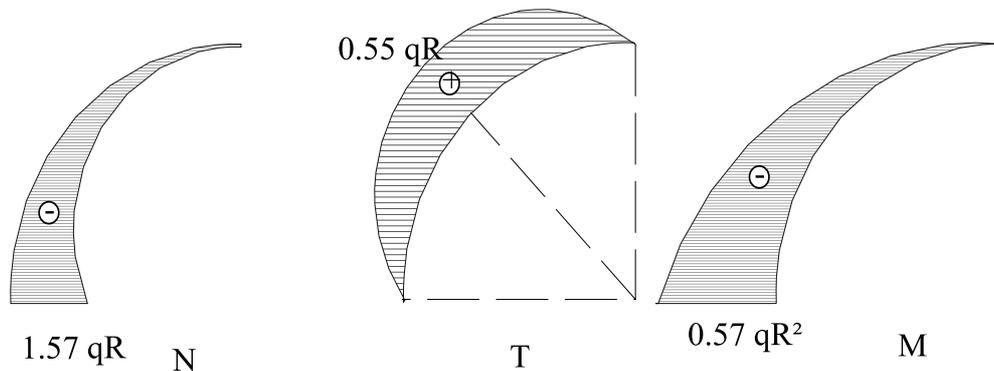


Fig. 3.17

(c) Charge uniformément répartie sur la projection horizontale de l'arc:

La résultante d'une charge uniformément répartie sur la projection de l'arc est égale au produit de l'intensité de la charge par la longueur de cette projection passant par son milieu et dirigée suivant l'orientation de la charge.

$$0 \leq \theta \leq 90$$

$$N(\theta) = -qR \sin^2\theta$$

$$N(0) = 0, \quad N(90) = -qR$$

$$T(\theta) = qR \sin\theta \cos\theta$$

$$T(0) = 0, \quad T(45) = qR/2, \quad T(90) = 0$$

$$M(\theta) = -qR \sin\theta \times (R \sin\theta)/2 = -(qR^2 \sin^2\theta)/2$$

$$M(0) = 0, \quad M(90) = -qR^2/2$$

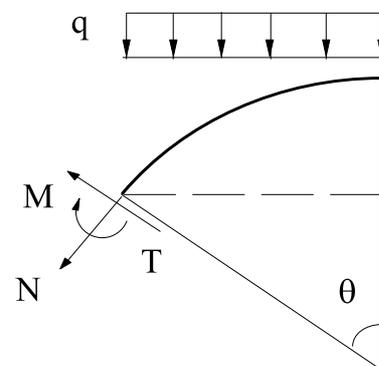
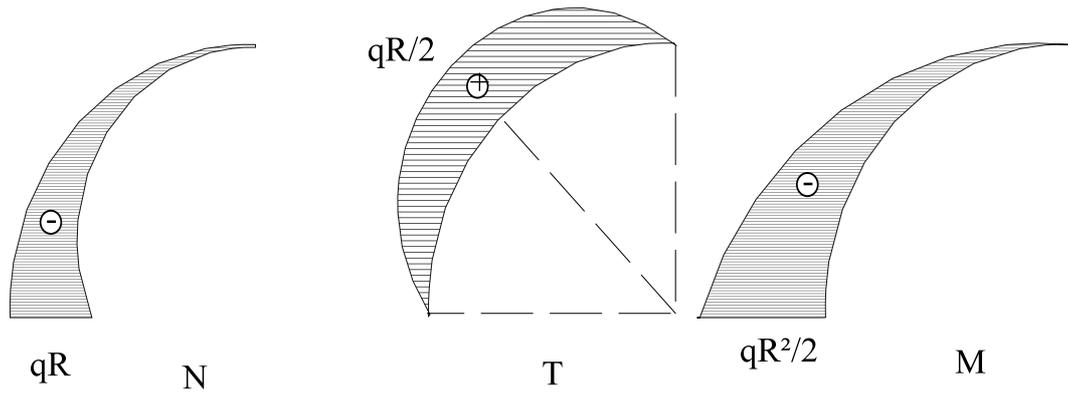


Fig. 3.18

**Fig. 3.19**

EXERCICES / chapitre 3

3.1 Construire les diagrammes des efforts tranchants et moments fléchissants pour les poutres de la figure E3.1, et déduire les valeurs extrêmes.

3.2 Déterminer les expressions et les diagrammes de M, N, et T des portiques isostatiques de la figure E3.2. Calculer les moments fléchissants maximaux.

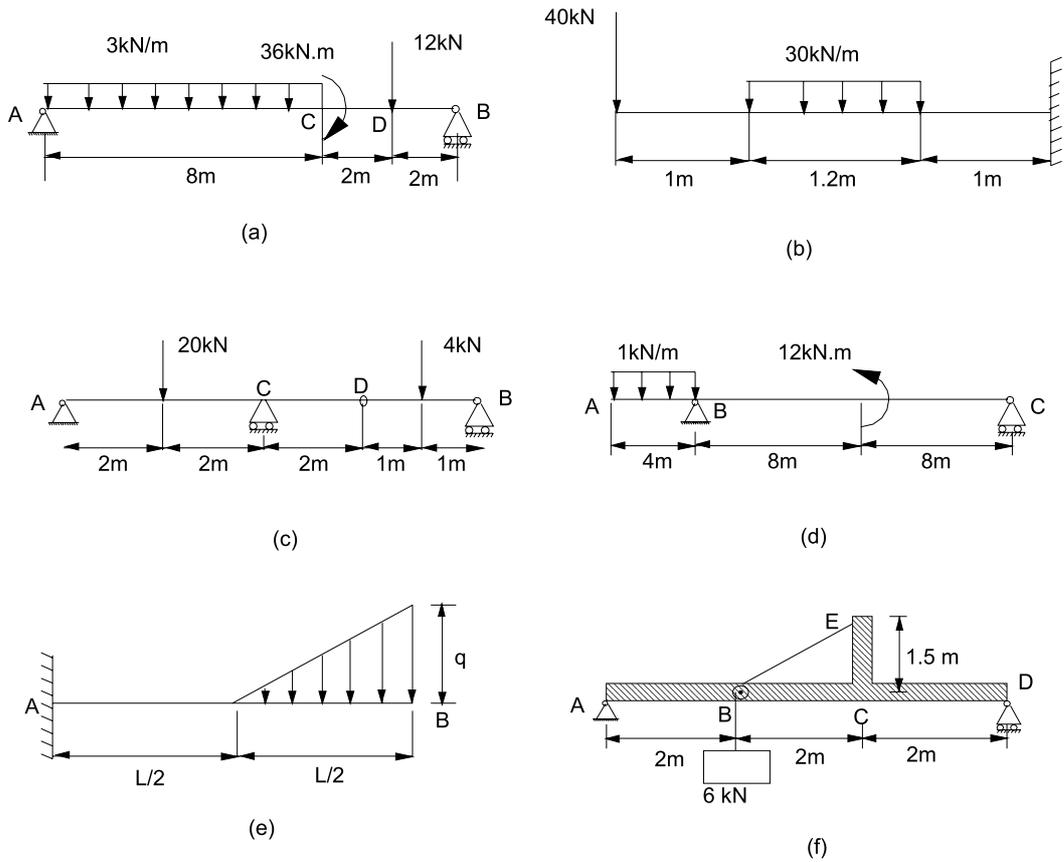
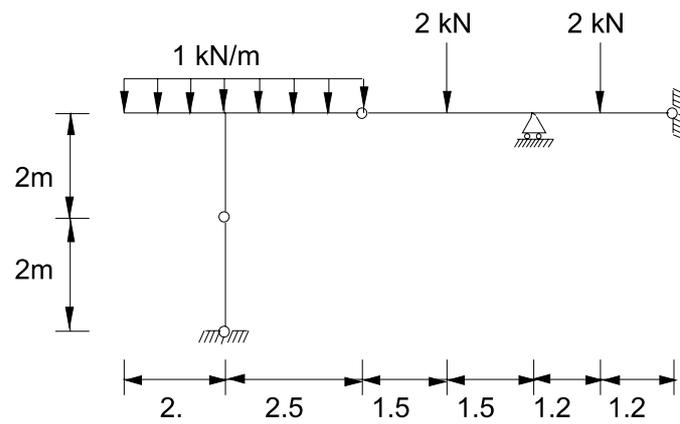
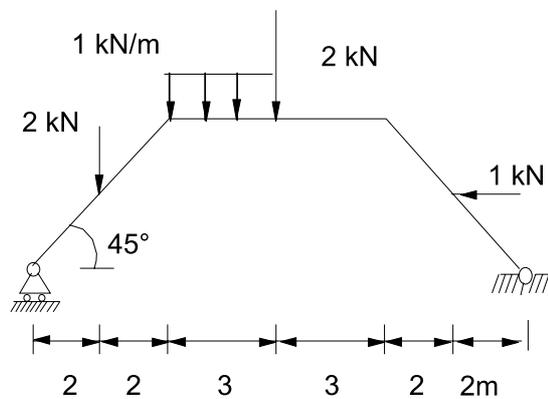


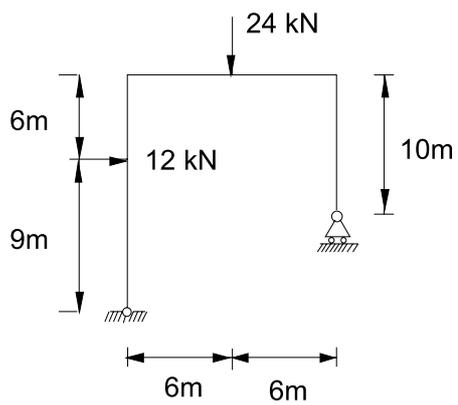
Fig. E3.1



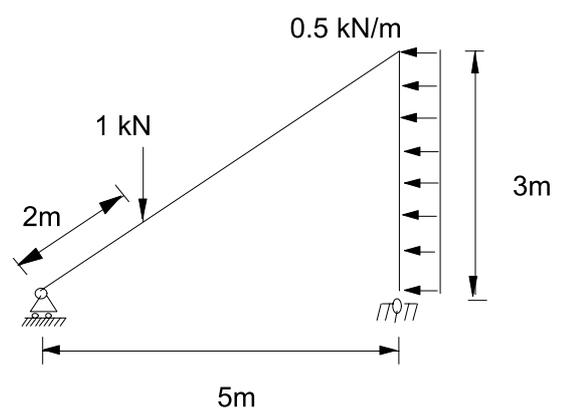
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. E3.2

3.3 On veut définir, de façon approchée mais rapide, la flexion maximale apportée par une dalle dans ses poutres de rives.

La dalle, simplement appuyée sur les poutres, supporte une charge

uniformément répartie q . Les poutres sont également simplement appuyées; on admettra qu'elles supportent les zones délimitées par des pointillés sur la Fig. E3.3.

Déterminer les densités de charges p_1 et p_2 permettant d'obtenir les moments fléchissants maximaux des poutres 1 et 2 (sous le seul effet de la dalle), par les formules:

$$M_{1\max} = \frac{P_1 b^2}{8} \text{ et } M_{2\max} = \frac{P_2 a^2}{8}$$

$$P_1 = \left(\frac{qa}{\gamma}\right) \left(1 - \frac{a^2}{2b^2}\right) \quad P_2 = \frac{qa}{2}$$

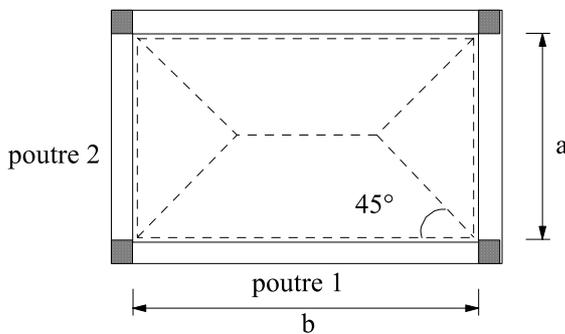


Fig. E3.3

3.4 Etant données q , L , et $P = 0.2 qL$ (Fig. E3.4). Calculer la longueur avantageuse de la console a et construire les diagrammes de T et M.

N.B: On appelle longueur avantageuse de la console d'une poutre la longueur de la console pour laquelle le moment fléchissant maximal a la plus petite valeur possible.

$$b = 0.676L, \quad a = 0.162L$$

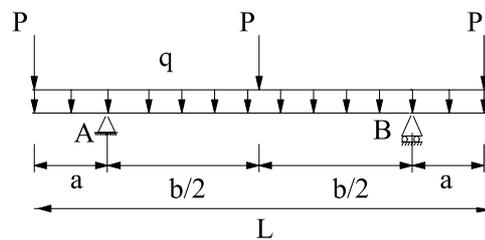


Fig. E3.4