

Chapitre 2

CARACTERISTIQUES GEOMETRIQUES DES FORMES

2.1 GENERALITES

La variété des formes des sections transversales des éléments utilisés dans les constructions n'est pas un fait du hasard. Dans la plupart des cas ces formes ont été développées pour répondre à des critères de résistance, de rigidité ou de stabilité. Ce chapitre étudie les principales caractéristiques des sections planes, leurs méthodes de calcul et leurs propriétés vis à vis les différents cas de sollicitations.

2.2 CARACTERISTIQUES CARTESIENNES

2.2.1 Centre de gravité

On appelle centre de gravité d'une section le point à travers lequel si on applique une force, elle résulte en une pression uniforme sur toute la section. Les coordonnées du centre de gravité $G(Y_G, Z_G)$ d'une section homogène (S) (Fig. 2.1) sont données par les relations:

$$Y_G = \frac{1}{S} \iint_S y ds$$

$$Z_G = \frac{1}{S} \iint_S z ds \quad (2-1)$$

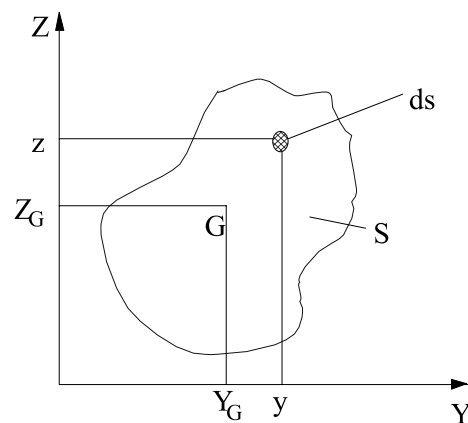


Fig. 2.1

y et z étant les coordonnées de l'aire élémentaire ds.

Ces intégrales peuvent être évaluées analytiquement si le contour de la section est exprimé par des expressions mathématiques simples. Si par contre le contour est une courbe irrégulière, on procède dans ce cas par les méthodes numériques. La méthode la plus simple consiste à discrétiser la section en éléments de surface s_i et faire la sommation comme suit:

$$Y_G = \frac{\sum y_i s_i}{\sum s_i} \quad (2-2)$$

$$Z_G = \frac{\sum z_i s_i}{\sum s_i}$$

Les expressions (2-2) tendent vers les solutions exactes quand les s_i couvrent complètement l'aire de la section.

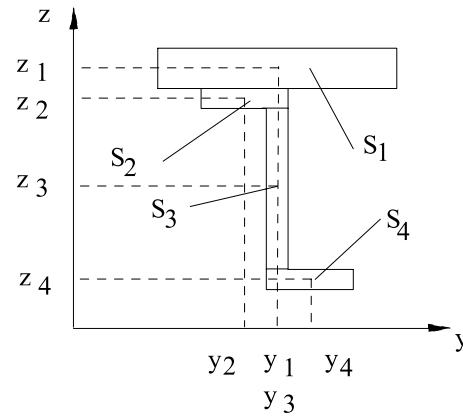


Fig. 2.2

2.2.2 Moments statiques

On considère l'aire d'une section (S) dans le plan défini par le système d'axe YOZ (Fig. 2.1). On appelle les moments statiques de l'aire (S) par rapport aux axes OY et OZ les quantités:

$$S_y = \iint_S z ds \quad (2-3)$$

$$S_z = \iint_S y ds$$

Par analogie avec le moment d'une force par rapport à un axe quelconque, le moment statique de l'aire d'une section par rapport à un axe situé dans son plan est égal au produit de la surface de la section par la distance de son centre de gravité à l'axe considéré.

En utilisant les équations (2-1), (2-3) deviennent:

$$S_y = S \cdot Z_G \quad (2-4)$$

$$S_z = S \cdot Y_G$$

Pour les surfaces complexes discrétisées en n aires simples, les moments statiques par rapport aux axes Oy et Oz seront respectivement égaux à:

$$S_y = \sum_{i=1}^n s_i z_i \tag{2-5}$$

$$S_z = \sum_{i=1}^n s_i y_i$$

Remarque: Le moment statique d'une surface par rapport à un axe passant par son centre de gravité est nul.

2.2.3 Moments quadratiques (moments d'inertie des sections)

On appelle moment quadratique l'intégrale des produits des aires élémentaires par le carré de leurs distances à partir de l'axe considéré, ainsi, les moments d'inertie d'une surface (S) quelconque par rapport à OY et OZ sont les suivants:

$$I_Y = \iint_S z^2 ds \tag{2-6}$$

$$I_Z = \iint_S y^2 ds$$

Les moments d'inertie par rapport aux axes passant par le centre de gravité de la section sont des moments centraux.

Le moment d'inertie de la section représente la capacité de la section à s'opposer à la déformation latérale, comme le montre l'exemple d'une feuille reposant sur deux appuis dont la déformation sous son poids propre est nettement plus importante que quand elle est pliée en forme de U, car le moment d'inertie I_Z de la forme en U est plus grand que celui de la section rectangulaire.

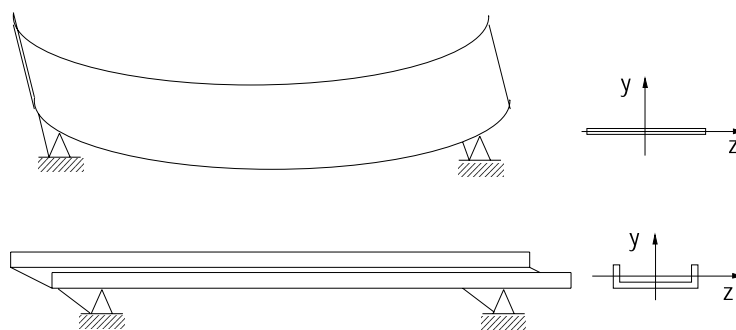


Fig. 2.3

En utilisant les équations générales (2-6), on peut déterminer les moments d'inertie d'une section quelconque quand on puisse exprimer les termes y , z et ds par des expressions analytiques. Pour une section triangulaire par exemple on a:

$$b(z) = \frac{B}{H}(H - z) \quad (2-7)$$

$$ds = b(z)dz \quad (2-8)$$

$$\Rightarrow I_Y = \iint_S z^2 ds = \frac{B}{H} \int_0^H z^2 (H - z) dz = \frac{BH^3}{12} \quad (2-9)$$

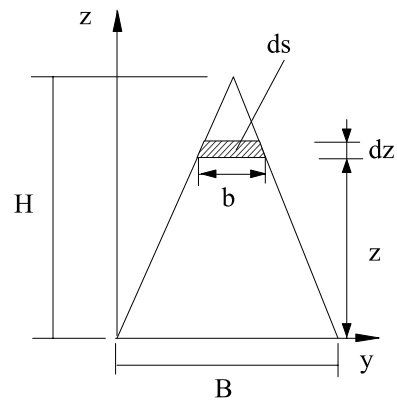


Fig. 2.4

2.2.4 Moment d'inertie polaire

On appelle moment d'inertie polaire d'une surface (S) par rapport à un point donné (pôle O) l'intégrale des produits des aires élémentaires par le carré de leurs distances r à partir du pôle. Il représente la capacité de la section à s'opposer aux déformations angulaires sous l'effet de la torsion.

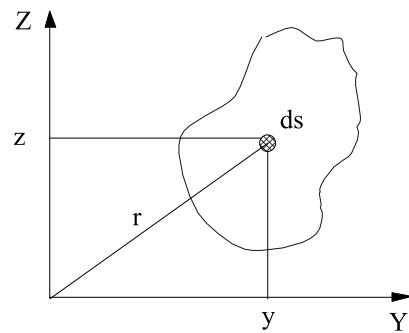


Fig. 2.5

$$I_p = \iint_S r^2 ds = \iint_S (z^2 + y^2) ds = I_Z + I_Y \quad (2-10)$$

De l'équation (2-10), il en résulte que le moment d'inertie polaire par rapport à un point est la somme des moments d'inertie par rapport à deux axes orthogonaux passant par ce point.

Exemple : moment polaire d'un cercle:

$$I_o = \iint_S r^2 ds \quad (2-11)$$

$$I_o = \int_0^{d/2} 2\pi r^3 dr = \frac{\pi d^4}{32} \quad (2-12)$$

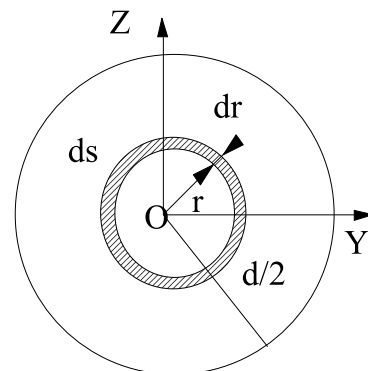


Fig. 2.6

2.2.5 Produit d'inertie (moment d'inertie centrifuge)

On appelle moment produit, l'intégrale des produits des propriétés des aires élémentaires par leurs distances comptées à partir des axes de coordonnées z, y :

$$I_{yz} = \iint_s yz ds \tag{2-13}$$

Remarques:

- Les moments d'inertie quadratiques et polaire sont toujours positifs
- Selon la disposition des axes, I_{ZY} peut être positif, négatif ou nul.
- En chaque point d'une aire plane, il existe deux axes orthogonaux par rapport auxquels le produit d'inertie est nul ($I_{yz} = 0$). Les deux axes ainsi définis sont appelés *axes principaux d'inertie*.
- Les axes sont principaux quand l'un des axes au moins constitue un axe de symétrie de la section. En effet, en raison de symétrie le produit d'inertie est nul par rapport à cet axe qui est donc une direction principale, la seconde étant nécessairement orthogonale.

2.3 FORMULE DE TRANSFORMATION DES MOMENTS D'INERTIE

Les moments d'inertie d'une section varient selon la disposition des axes par rapport auxquels ces moments sont calculés. Deux types de transformations seront étudiées : translation et rotation d'axes. La variation des moments d'inertie par rapport à un système d'axes quelconques, est déterminé à l'aide d'une combinaison de deux transformations partant d'un système d'axe central.

2.3.1 Translation d'axes

Les formules définies ci-dessous permettent la détermination des moments d'inertie par rapport à des axes Y_1, Z_1 parallèles à des axes centraux Y, Z dont les moments sont supposés connus.

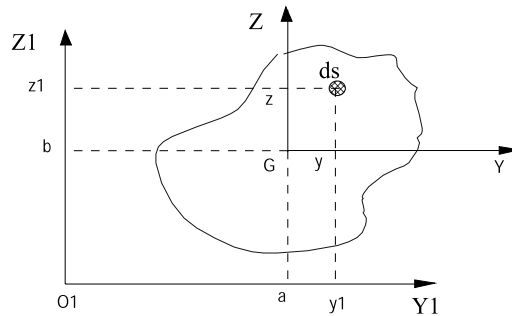


Fig. 2.7

$$I_Z = \iint_s y^2 ds ; I_y = \iint_s z^2 ds ;$$

$$I_{yz} = \iint_s yz ds \tag{2-14}$$

Les moments par rapport à Y_1, Z_1 :

$$I_{z1} = \iint_s y_1^2 ds ; I_{y1} = \iint_s z_1^2 ds ; I_{z1y1} = \iint_s y_1 z_1 ds \tag{2-15}$$

La translation des axes est exprimée par :

$$y_1 = y + a \quad z_1 = z + b \tag{2-16}$$

En substituant y_1 et z_1 par leurs valeurs dans l'équation (2-15)

On obtient :

$$I_{z_1} = \iint_s (y + a)^2 ds \quad (2-17)$$

$$= \iint_s (y^2 + 2ay + a^2) ds \quad (2-18)$$

$$= \iint_s y^2 ds + 2a \iint_s y ds + a^2 \iint_s ds \quad (2-19)$$

Comme les moments statiques de l'aire par rapport aux axes centraux sont nuls, le terme

$$2a = \iint_s y ds = 0 \quad (2-20)$$

et

$$\iint_s y^2 ds = I_z \quad (2-21)$$

$$a^2 \iint_s ds = a^2 S \quad (2-22)$$

Par conséquent:

$$I_{z_1} = I_z + a^2 S \quad (2-23)$$

On aurait de même:

$$I_{y_1} = I_y + b^2 S \quad (2-24)$$

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} + abS \quad (2-25)$$

D'où le théorème d'Huygens:

1- "Le moment d'inertie d'une surface par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie de cette surface par rapport à l'axe parallèle passant par le centre de gravité, augmenté du produit de l'aire par le carré de la distance mutuelle des deux axes".

2- "Le moment d'inertie centrifuge par rapport à un système d'axes orthogonal est égal au moment d'inertie centrifuge par rapport au système d'axes centraux parallèles aux axes donnés plus le produit de l'aire de la section par les coordonnées de son centre de gravité dans le nouveau système d'axes.

2.3.2 Rotation d'axes

Les moments et produits d'inertie sont supposés connus dans le système d'axes OYZ. Les moments et produits d'inertie par rapport au système d'axes OY_1Z_1 obtenu par une rotation α des axes initiaux sont donnés par:

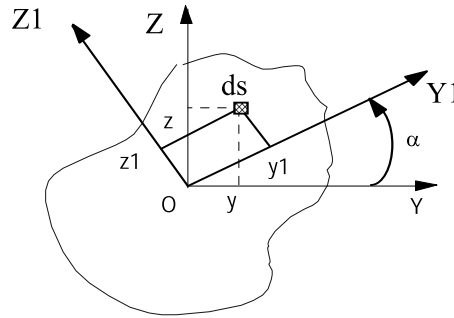


Fig. 2.8

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha \tag{2-26}$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} - \frac{I_y - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha \tag{2-27}$$

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha + I_{yz} \cos 2\alpha \tag{2-28}$$

En ajoutant les équations (2-26) et (2-27) terme à terme, on obtient :

$$I_y + I_z = I_{y_1} + I_{z_1} \tag{2-29}$$

$$\Rightarrow I_P = I_{P1}$$

2.4 MOMENTS D'INERTIE PRINCIPAUX

Les équations de transformations expriment les variations des moments d'inertie en fonction de l'angle de rotation α . Les valeurs maximales et minimales sont particulièrement recherchées. Ils correspondent à un moment d'inertie centrifuge $I_{YZ} = 0$.

On obtient ainsi l'orientation des axes principaux:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} \tag{2-30}$$

Les valeurs des moments d'inertie principaux peuvent être obtenues à partir des formules générales si l'on y pose $\alpha = \alpha_0$.

$$I_1 = \frac{I_y + I_z}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \tag{2-31}$$

$$I_2 = \frac{I_y + I_z}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} \quad (2-32)$$

2.5 REPRESENTATION GEOMETRIQUE DES MOMENTS D'INERTIE (CERCLE DE MOHR)

Problème direct :

I_y, I_z, I_{yz} connus ; I_1, I_2, α inconnus.

- On choisit un système de coordonnées orthogonal $O I_{y,z}, I_{yz}$ et une échelle adéquate
- On construit A (I_y, I_{yz}) et B ($I_z, -I_{yz}$)
- On relie AB (diamètre qui coupe l'axe $O I_{y,z}$ en C).

- Le rayon du cercle est: $AC = BC = \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2}$

- On trace le cercle qui coupe les abscisses en A' et B'
- On mesure les distances OA' et OB' et on obtient I_1 et I_2
- On mesure l'angle $ACA' = 2\alpha_0$

Problème indirect:

I_y, I_z, I_{yz} connus ; I_1, I_2, α inconnus.

- On choisit le système de coordonnées $O I_{y,z}, I_{yz}$
- On porte sur l'axe des abscisses, en échelle requise, OA' et OB'
- On localise le centre du cercle C: $B'C = A'C = \frac{1}{2}(I_1 - I_2)$.
- On trace le cercle de rayon A'C.
- On détermine le point A d'un angle $A'CA = 2\alpha_0$ et le point B diamétralement opposé

- On obtient les valeurs de I_y, I_z, I_{yz} en projetant A et B sur les axes.

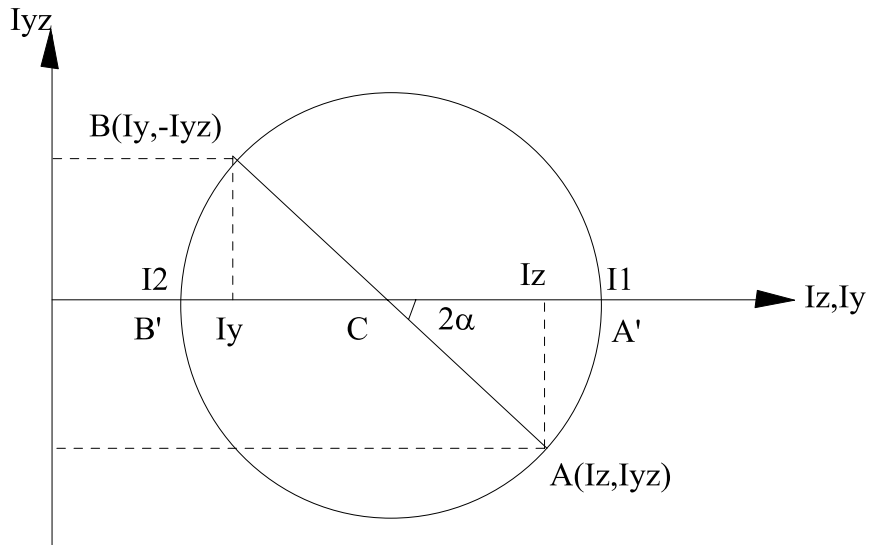


Fig. 2.9

2.6 APPLICATION

Déterminer les moments d'inertie principaux et centraux de la section en forme de L ci-dessous.

$$S_1 = 10 \text{ cm} \quad Z_1 = 5 \text{ cm} \quad Y_1 = 0.5 \text{ cm}$$

$$I_{z1} = 83.33 \text{ cm}^4 \quad I_{y1} = 0.83 \text{ cm}^4$$

$$S_2 = 9 \text{ cm} \quad Z_2 = 0.5 \text{ cm} \quad Y_2 = 5.5 \text{ cm}$$

$$I_{z2} = 0.75 \text{ cm}^4 \quad I_{y2} = 60.75 \text{ cm}^4$$

Les coordonnées du centre de gravité sont:

$$Z_G = \frac{\sum S_i Z_i}{\sum S_i} = \frac{10 \times 5 + 9 \times 0.5}{19} = 2.87 \text{ cm}$$

$$Y_G = \frac{\sum S_i Y_i}{\sum S_i} = \frac{10 \times 0.5 + 9 \times 5.5}{19} = 2.87 \text{ cm}$$

Les distances entre les centres de gravité locaux et le centre de gravité de la section sont:

$$a_1 = z_1 - Z_G = 2.13 \text{ cm} \quad a_2 = z_2 - Z_G = -2.37 \text{ cm}$$

$$b_1 = y_1 - Y_G = -2.37 \text{ cm} \quad b_2 = y_2 - Y_G = 2.63 \text{ cm}$$

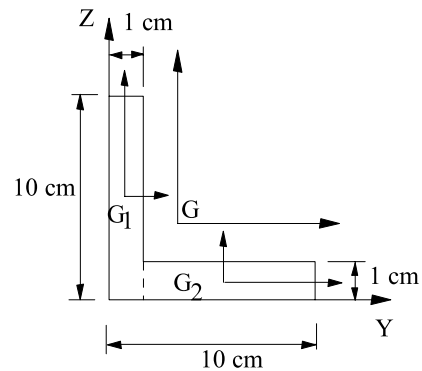


Fig. 2.10

Les moments d'inertie centraux par rapport aux axes parallèles à OY et OZ:

$$I_z = \sum I_{zi} + S_i a_i^2 = 83.33 + 0.75 + 10 \times (2.13)^2 + 9 \times (-2.37)^2 = 180 \text{ cm}^4$$

$$I_y = \sum I_{yi} + S_i b_i^2 = 0.83 + 60.75 + 10 \times (-2.37)^2 + 9 \times (2.63)^2 = 180 \text{ cm}^4$$

$$I_{yz} = \sum I_{yzi} + S_i a_i b_i = 0 + 0 + 10(2.13)(-2.37) + 9(-2.37)(2.63) = -106.6 \text{ cm}^4$$

Les moments d'inertie centraux principaux sont

$$I_{1,2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_y - I_z}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = 180 \pm 106.6 \text{ cm}^4$$

$$I_1 = 286.6 \text{ mm}^4 \quad \text{et} \quad I_2 = 73.4 \text{ cm}^4$$

L'orientation des axes principaux:

$$\text{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{yz}}{I_y - I_z} = \infty \quad \Rightarrow 2\alpha_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha_0 = \frac{\pi}{4}$$

EXERCICES / chapitre 2

2.1 Déterminer les moments d'inertie principaux et centraux des sections de la Fig. E2.1

- a) $2.813 \times 10^7 \text{ mm}^4, 1.25 \times 10^7 \text{ mm}^4$
- b) $2.145 \times 10^7 \text{ mm}^4, 0.82 \times 10^7 \text{ mm}^4$
- c) $1.37 \times 10^7 \text{ mm}^4, 0.802 \times 10^7 \text{ mm}^4$
- d) $2.43 \times 10^7 \text{ mm}^4, 1.687 \times 10^7 \text{ mm}^4$
- e) $3.7315 r^4, 1.726 r^4$

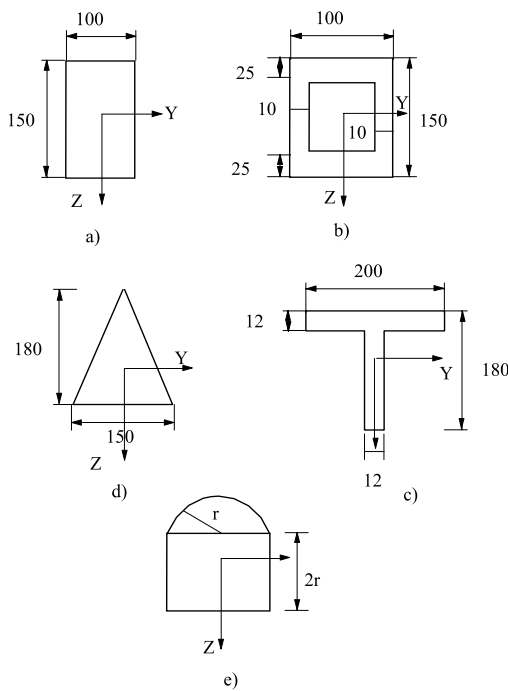


Fig. E2.1

2.2 Calculer les moments d'inertie principaux d'une section rectangulaire $3a \times a$ par rapport aux axes ayant un coin de la section comme origine.

✓ $9.583a^4, 0.411a^4$

2.3 Une section transversale d'une poutre est symétrique par rapport à un segment de droite AB. Les longueurs des lignes moyennes de dix bandes de même largeurs et normales à AB sont respectivement:

16.0, 28.0, 32.0, 32.8, 32.0, 31.4, 25.2, 20.6, 15.0 et 6.6 mm. La hauteur AB est 75 mm.

Calculer le moment d'inertie de cette aire par rapport à l'axe central perpendiculaire à AB.

✓ $5.869 \times 10^5 \text{ mm}^4$

2.4 Calculer les moments d'inertie centraux I_z, I_y et I_{yz} d'une section de cornière à ailes inégales représentée sur la Fig. E2.4.

Déterminer graphiquement l'orientation des axes principaux et les moments d'inertie par rapport à ces axes.

✓ $1.085 \times 10^7 \text{ mm}^4; 2.48 \times 10^6 \text{ mm}^4;$
 $-2.98 \times 10^6 \text{ mm}^4; 17.72^\circ;$
 $1.18 \times 10^7 \text{ mm}^4; 1.53 \times 10^6 \text{ mm}^4.$

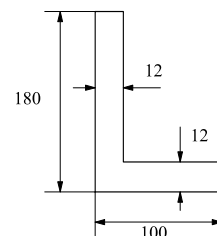


Fig. E2.4

2.5 Déterminer l'aire (S), le moment statique (S_Z), le centre de gravité (Y_G, Z_G) et le moment d'inertie (I_Z) d'une section droite dont la ligne moyenne est constituée par un arc de parabole d'ouverture $2a$, et de flèche f et dont l'épaisseur e mesurée verticalement est constante (Fig. E2.5).

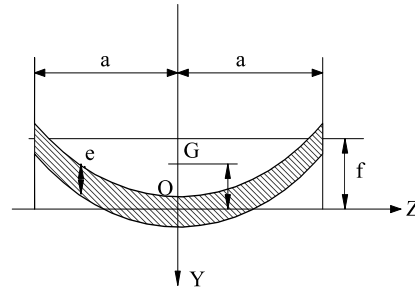


Fig. E2.5

✓ $S = 2ae, S_Z = 2aef/3; Z_G=0;$
 $Y_G = -f/3 ; I_Z = 2aef^2/5$

2.6 Déterminer la position (angle α) d'une poutre, dont la section droite est une cornière en S ayant un centre de symétrie en O (Fig. E2.6), pour que la flèche sous un chargement perpendiculaire à l'axe orienté par α , soit minimale. Calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe parallèle passant par le centre de gravité de la section.

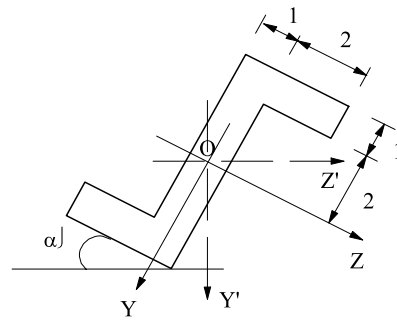


Fig. E2.6

✓ $\alpha = -21^\circ 21'; I_{Z'} = 49.16 \text{ cm}^4$

2.7 Tracer le cercle de Mohr d'une section circulaire de diamètre D et expliquer la particularité de ce cas. Donner deux autres formes de sections présentant les mêmes caractéristiques.

✓ *Si une section admet trois axes de symétrie ou plus, alors tous les axes centraux sont des axes principaux et tous les moments d'inerties par rapport à ces axes sont égaux.*

Exemples de sections: carrée, triangle équilatéral.