

## Chapitre 14

# POUTRES HYPERSTATIQUES

### 14.1 INTRODUCTION

On appelle poutres hyperstatiques, les poutres dont les réactions aux appuis ne peuvent pas être déterminées par les seules équations de la statique. Le degré d'hyperstaticité de la poutre est égal au nombre d'inconnues surabondantes par rapport au 3 équations d'équilibre de la statique. Les exemples de systèmes hyperstatiques sont nombreux: la majorité des structures portantes de génie civil sont hyperstatiques comme les portiques auto-stables, les poutres continues sur plusieurs appuis etc...(Fig. 14.1)

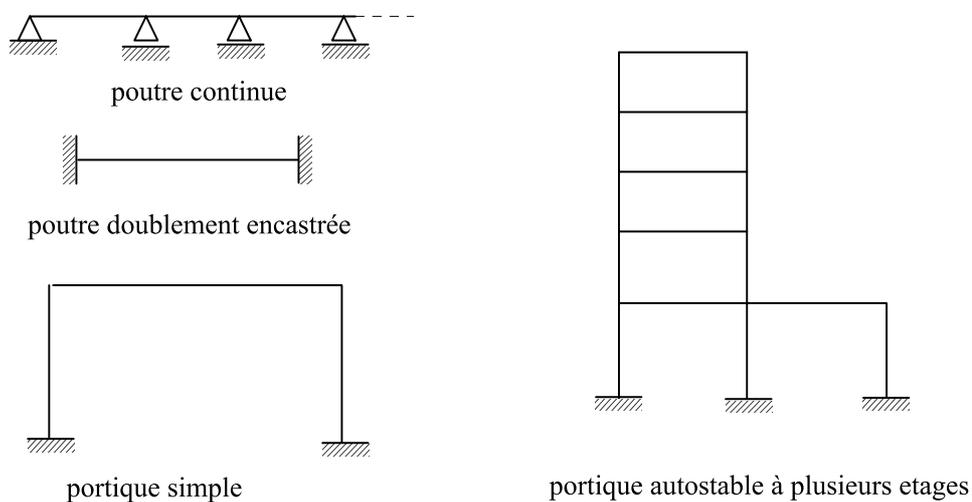


Fig. 14.1

### 14.2 METHODES DE RESOLUTION

Pour déterminer les réactions des poutres hyperstatiques, on utilise des équations supplémentaires établies par l'équation différentielle de la déformée aux conditions d'appuis qui permettent non seulement de déterminer les constantes d'intégration mais aussi d'avoir pour chaque inconnue surabondante une équation supplémentaire. On obtient ainsi les équations nécessaires à la résolution du système.

La procédure la plus simple consiste à supprimer les liaisons surabondantes pour rendre la poutre isostatique. On détermine ensuite les rotations et les déplacements aux niveaux des appuis sous l'effet des charges données et des inconnues hyperstatiques par l'une des méthodes usuelles telles que la méthode des paramètres initiaux ou de la poutre fictive.

**14.2.1 Application (1) : Méthode des paramètres initiaux**

Déterminer le moment maximale de la poutre hyperstatique ci-contre.

**Solution:**

On établit les équations de la déformée en fonction de la réaction R au point A.

$$EI\theta(x) = EI\theta_0 - R_A \frac{x^2}{2} + \frac{q}{L} \frac{x^4}{24}$$

$$EIv(x) = EIv_0 + EI\theta_0 x - R_A \frac{x^3}{6} - \frac{q}{L} \frac{x^3}{120}$$

Les trois conditions aux limites nous permettent de déterminer en plus des paramètres initiaux, la réaction R:

$$v(L) = 0 \quad \theta(L) = 0 \quad v(0) = 0$$

$$v(0) = 0 \Rightarrow v_0 = 0$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow EIv(L) = 0 \Rightarrow EI\theta_0 L - R \frac{L^3}{6} + \frac{qL^4}{120} = 0$$

$$\theta(L) = 0 \Rightarrow 0 = EI\theta_0 - R \frac{L^2}{2} + \frac{qL^3}{24}$$

D'où :

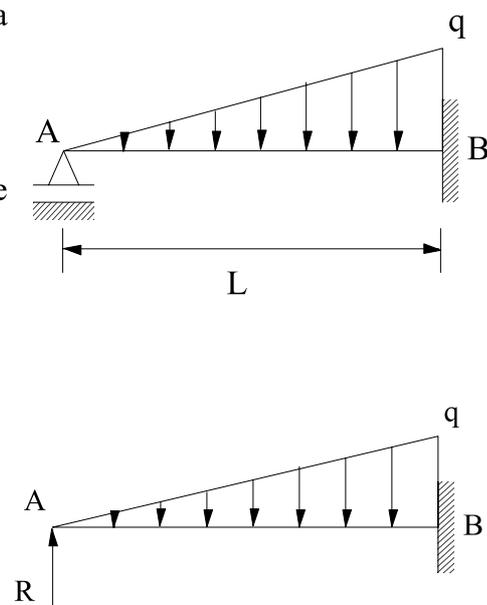
$$R = \frac{qL}{10}$$

$$\theta_0 = \frac{qL^3}{120EI}$$

Les expressions de l'effort tranchant et du moment fléchissant sont:

$$T = \frac{qL}{10} - \frac{q}{L} \frac{x^2}{2}$$

$$M_x = \frac{qL}{10} x - \frac{q}{L} \frac{x^3}{6}$$



**Fig. 14.2**

$$T = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{\sqrt{5}} \rightarrow M_{\max} = \frac{ql^2}{15\sqrt{5}}$$

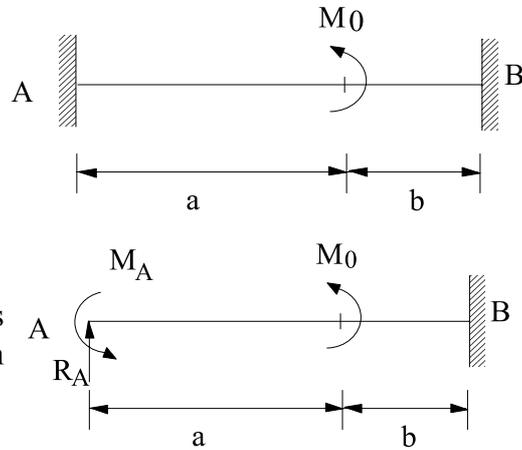
**14.2.2 Application (2) : Méthode de la poutre fictive**

Déterminer les réactions de la poutre bi-encastée ci-contre.

**Solution:**

En supprimant un encastrement et on le remplaçant par un moment et une force, la poutre devient isostatique.

On détermine le diagramme des moments et on transforme la poutre en poutre fictive on obtient alors:



**Fig. 14.3**

$$T_{Af} = \frac{L}{2} \left( \frac{R_A L}{EI} \right) - \frac{M_A}{EI} (L) - \frac{M_0}{EI} (b)$$

$$\theta_A = \frac{T_{Af}}{EI} = 0 \Rightarrow R_A L^2 - 2M_A L = 2M_0 b \quad (1)$$

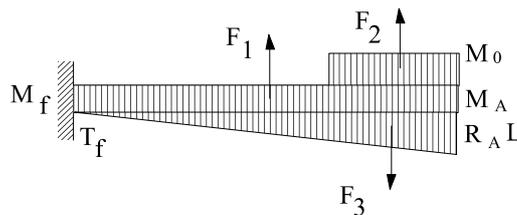
$$M_{Af} = \frac{L}{2} \left( \frac{R_A L}{EI} \right) \left( \frac{L}{3} \right) - L \left( \frac{M_A}{EI} \right) \left( \frac{L}{2} \right) - b \left( \frac{M_0}{EI} \right) \left( \frac{M_0}{EI} \right)$$

$$V_A = \frac{M_{Af}}{EI} = 0 \Rightarrow R_A L^3 - 3M_A L^2 = 3M_0 b$$

D'où :

$$R_A = \frac{6M_0 ab}{L^3}$$

$$M_A = \frac{M_0 b}{L^2} (2a - b)$$



**14.3 POUTRES DROITES HYPERSTATIQUES (CONTINUES)**

On envisage ici les poutres continues, c'est-à-dire les poutres comportant plusieurs travées sans articulations, et reposant sur des appuis simples. Le degré d'hyperstaticité de ce genre de poutres est de n-1, n étant le nombre de travées.

La méthode dite "*Théorème des trois moments ou théorème de Clapeyron*" permet de déterminer les moments sur appuis intermédiaires de la poutre continue.

Considérons la poutre continue de la Fig. 14.4. On décompose la poutre au droit des appuis, et on obtient ainsi n poutres simplement appuyées aux extrémités.

La continuité de la poutre impose que la rotation de la section au droit des appuis soit unique. On obtient ainsi un système de n-1 équations sous la forme :

$$M_{i-1}L_{i-1} + 2M_i(L_{i-1} + L_i) + M_{i+1}L_i = -6EI(\theta_i^g + \theta_i^d)$$

pour EI constant.

Où

$M_{i-1}, M_i$  et  $M_{i+1}$  : Sont les moments aux appuis i-1, i et i+1

$L_{i-1}$  et  $L_i$  : travées des poutres adjacentes

$\theta_i^g$  et  $\theta_i^d$  : les rotations au niveau de l'appui i des poutres gauches et droites

dues seulement aux charges, agissant dans les travées respectives.

Les valeurs de  $\theta_i^g, \theta_i^d$  peuvent être déterminées par n'importe quelle méthode.

Pour des cas de charges simples on utilise la méthode des poutres fictives, qui donne directement les valeurs des rotations sous les formes:

$$\theta_i^g = \frac{A_{i-1} \bar{x}_{i-1}}{l_{i-1}} \quad \theta_i^d = \frac{A_i \bar{x}_i}{l_i}$$

Le sens des rotations est pris comme suit:

$\theta_i^g > 0$  dans le sens trigonométrique

$\theta_i^d > 0$  dans le sens des aiguilles d'une montre

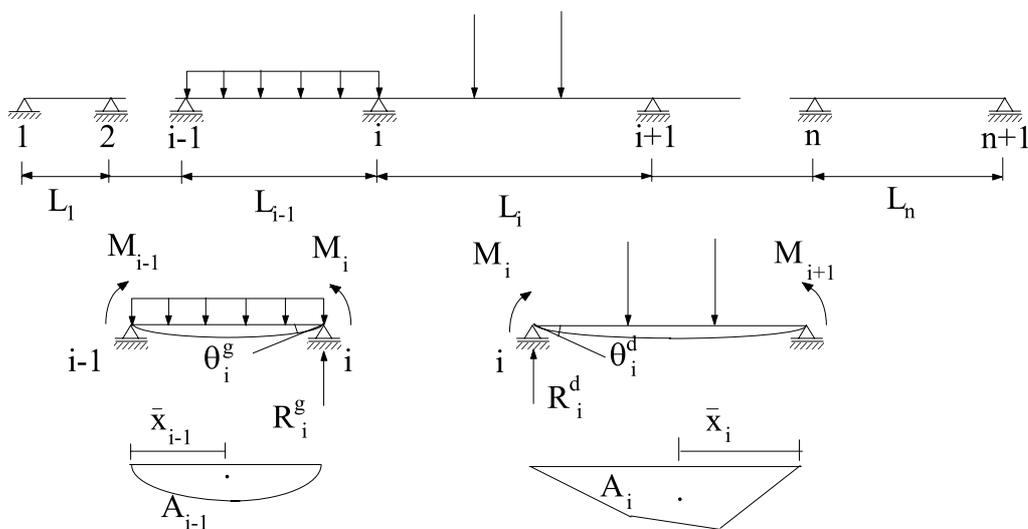


Fig. 14.4

Dans le cas d'une poutre continue ayant une extrémité encastrée ou en console, on supprime la console et on la remplace par un effort tranchant égal à la résultante de toutes les charges sur cette console et un moment égal au moment résultant de ces charges, appliqués à l'appui de rive. L'encastrement est transformé en une travée de longueur  $L = 0$ . La première équation s'écrira dans ce cas:

$$2M_i L_i + M_i L_i = -6EI\theta_i^d$$

On résout le système d'équation (14-1) et on obtient ainsi les moments aux appuis, ensuite on procède au calcul des réactions aux appuis par la formule suivante:

$$R_i = R_i^o + \frac{M_{i-1} - M_i}{l_{i-1}} + \frac{M_{i+1} - M_i}{l_i}$$

Où  $R_i$  : la réaction au niveau de l'appui  $i$

$R_i^o$  : la somme des réactions à l'appui  $i$  des deux poutres adjacentes, dues seulement aux charges données

- La travée fictive de l'encastrement n'est pas prise en compte
- Les charges sur la console sont incluses dans le calcul de  $R_i^o$  qui est égale à la résultante de toutes les forces extérieures agissant sur la console.

### Remarque :

Le tracé des diagrammes des efforts internes et la détermination des déformations et rotations d'une section arbitraire peuvent être établis pour chaque travée comme pour une poutre simplement appuyée aux extrémités et soumise aux forces données et aux moments aux appuis déterminés par la méthode des 3 moments. Toutes les méthodes utilisées pour le calcul des poutres isostatiques sont bien sûr applicables dans ce cas.

#### 14.3.1 Application

Tracer le diagramme de l'effort tranchant et du moment fléchissant de la poutre continue ci-dessous.

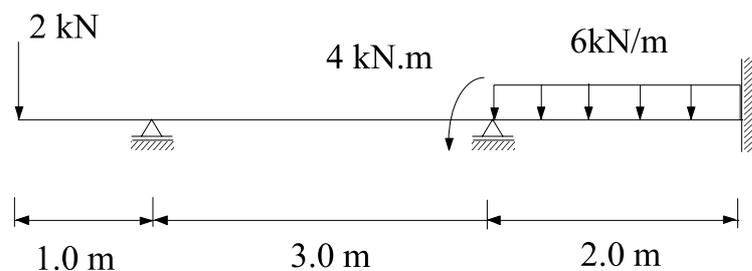
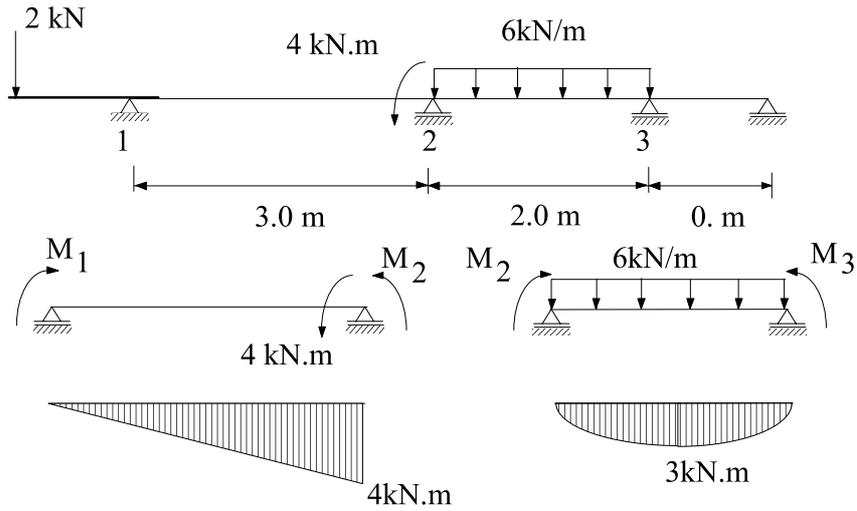


Fig. 14.5



**Fig. 14.6**

**Solution:**

1/ Décomposition de la poutre:

On réduit la console et on remplace l'encastrement par la travée fictive, on obtient la poutre continue ci-contre:

2/ Equations des moments :

$$n = 2$$

$$M_1 l_1 + 2M_2(l_1 + l_2) + M_3 l_2 = -6EI(\theta_2^g - \theta_2^d)$$

$$n = 3$$

$$M_2 l_2 + 2M_3 l_2 = -6EI\theta_3^g$$

3/ Détermination des rotations : poutre fictive:

$$EI\theta_2^g = T_f = \frac{Ml_1}{3} = 4\text{kN.m}^2 \quad (\text{S d'un triangle})$$

$$EI\theta_2^d = EI\theta_3^g = \frac{ql_2^3}{24} = 2\text{kN.m}^2 \quad (\text{S d'une parabole} = \frac{2hl}{3})$$

Les équations des moments deviennent:

$$10M_2 + 2M_3 = -30$$

$$M_2 + 2M_3 = -6$$

D'où :

$$M_2 = -\frac{8}{3} = -2.67 \text{ kN.m} \quad \text{et} \quad M_3 = -\frac{5}{3} = -1.67 \text{ kN.m}$$

4/ Détermination des réactions :

$$R_1 = R_1^0 + \frac{M_2 - M_1}{l_1} = P + \frac{M}{l_1} + \frac{M_2 - M_1}{l_1} = 3.11 \text{kN}$$

$$R_2 = R_2^0 + \frac{M_1 - M_2}{l_1} + \frac{M_3 - M_2}{l_2}$$

$$= -\frac{M}{l_1} + \frac{ql_2}{2} + \frac{M_1 - M_2}{l_1} + \frac{M_3 - M_2}{l_2} = 5.389 \text{kN}$$

$$R_3 = R_3^0 + \frac{M_2 - M_3}{l_2} = \frac{ql_2}{2} + \frac{M_2 - M_3}{l_2} = 5.5 \text{kN}$$

-Construction du diagramme de l'effort tranchant et du moment fléchissant par la méthode directe.

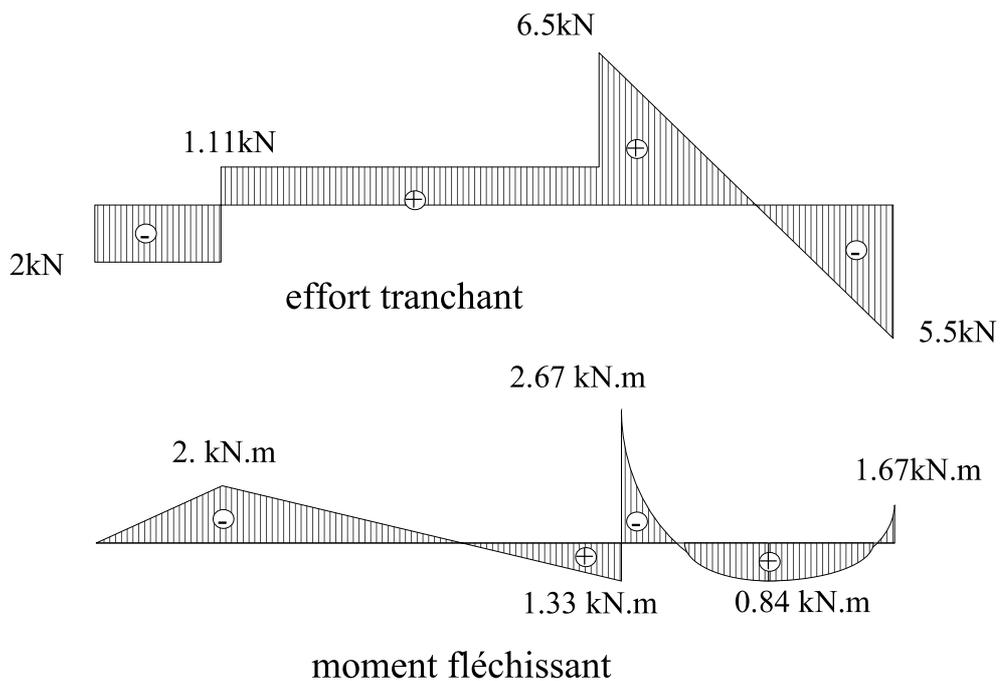
Le moment maximal sur la travée L<sub>3</sub> :

$$T(x) = 0 \Rightarrow \frac{5.5}{x} = \frac{6.5}{L_2 - x} \Rightarrow 5.5L_2 - 5.5x = 6.5x$$

$$\Rightarrow x = \frac{5.5L_2}{6.5 + 5.5} = \frac{5.5 \times 2}{6.5 + 5.5} = 0.92 \text{m}$$

$$M_x = M_3 + \frac{qx^2}{2} + Rx$$

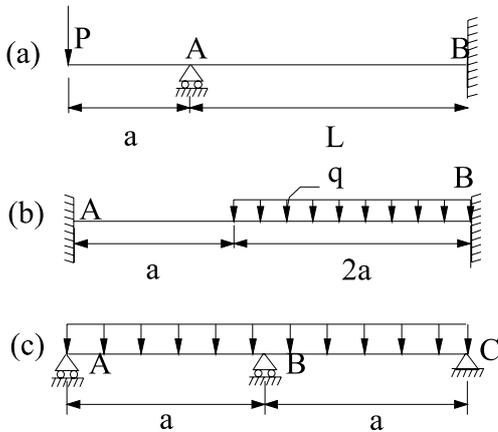
$$M_{\max} = -1.667 + \frac{6(0.92)^2}{2} = 0.87 \text{kN.m}$$



**EXERCICES / chapitre 14**

**14.1** Déterminer les réactions aux appuis des poutres suivantes.

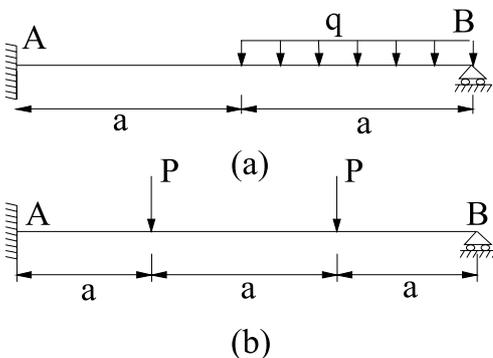
- ✓ a)  $R_a = P + 3Pa/2L$   $M_b = Pa/2$
- b)  $R_a = 16qa/27$   $M_a = 4qa^2/9$   
 $R_b = 38qa/27$   $M_b = 3qa^2/2$
- c)  $R_a = R_c = 3qL/8$   $R_b = 5qL/4$



**Fig. E14.1**

**14.2** Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant des poutres suivantes.

- ✓ (a)  $M_{max} = 7qa^2/32$   
 $T_{max} = 41qa/63$
- (b)  $M_{max} = Pa$   $T_{max} = 4P/3$

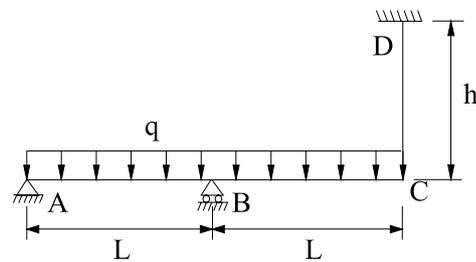


**Fig. E14.2**

**14.3** Une poutre AB de longueur L est encadrée aux extrémités. Elle supporte une charge P appliquée à une distance a de l'encastrement A. Montrer que les moments aux encastres peuvent s'écrire sous les formes suivantes:  $M_a = bM_f/L$  et  $M_b = aM_f/L$ ; où  $M_f = (Pab)/L$  est le moment maximale d'une poutre équivalente et simplement appuyée.

**14.4** Une poutre ABC (figure E14.4) est simplement appuyée sur A et B, et attachée par un câble extensible au point C. Déterminer la tension du câble sous l'effet d'une charge uniformément répartie sur toute la longueur de la poutre.

✓  $T = 3qAL^4 / (8AL^3 + 12hI)$ .



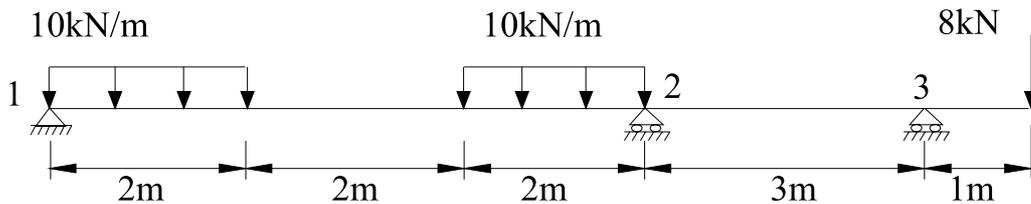
**Fig. E14.4**

**14.5** Déterminer le tassement différentiel de l'appui intermédiaire par rapport aux appuis de rives de la poutre (c) de la figure E14.1 qui permet d'avoir toutes les réactions égales.

✓  $V_b = 7ql^4 / 72EI$

**14.6** Tracer les diagrammes de l'effort tranchant et du moment fléchissant de la poutre continue de la figure E14.6 en déduisant les efforts dans les sections dangereuses.

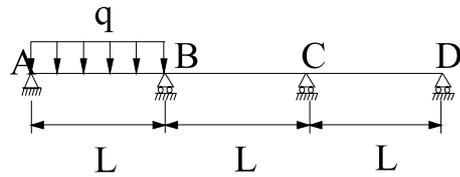
✓  $R_1=17.63kN, R_2=24.44kN,$   
 $R_3=5.93kN, T^+=17.63kN, T^-=-22.37kN,$   
 $M_{max}^+=15.44kN.m, M_{max}^-=-14.22kN.m$



**Fig. E14.6**

**14.7** Déterminer les réactions aux appuis de la poutre continue ci-contre (Fig. E14.7).

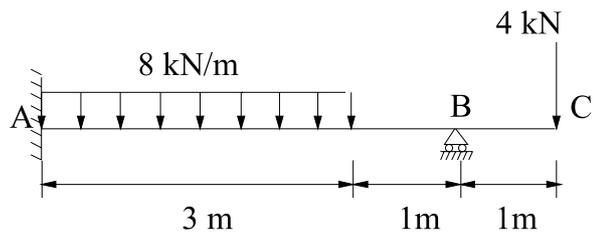
✓  $R_a=13qL/30, R_b=13qL/20,$   
 $R_c=qL/10, R_d=qL/60$



**Fig. E14.7**

**14.8** Déterminer la réaction de l'appui B (Fig. E14.8) si au cours du chargement de la poutre, cet appui s'affaisse de 3 mm. On donne  $EI = 4. \times 10^6 \text{ N.m}^2$

✓  $R_b=10.42 \text{ kN}$



**Fig. E14.8**