

# *Chapitre 13*

## **DEFORMATION ELASTIQUE A LA FLEXION**

### 13.1 GENERALITES

Quand on charge une poutre, la ligne moyenne qui, initialement est droite, se déforme sous l'effet d'un moment fléchissant. L'allure de l'axe longitudinal de la poutre après flexion (déformé) est appelée ligne élastique.

On s'intéresse au calcul des déformations élastiques à la flexion pour pratiquement deux raisons :

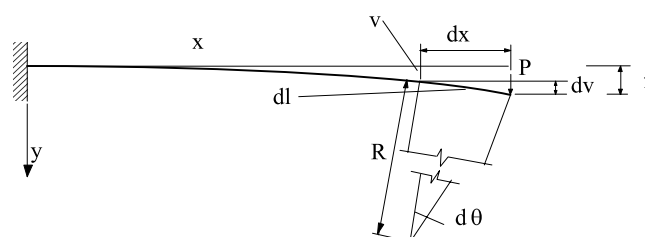
- Calcul à la rigidité : en plus du calcul à la résistance, on doit parfois vérifier que la flèche de la poutre ne dépasse pas la valeur de la flèche maximale permise.

- Le calcul des déformations est essentiel pour l'analyse des systèmes hyperstatiques, comme nous allons le voir dans le chapitre suivant.

### 13.2 EQUATION DIFFERENTIELLE DE LA LIGNE ELASTIQUE

L'expression de l'équation de la déformation peut être facilement obtenue à partir de la relation entre la courbure et le moment fléchissant:

$$\frac{1}{R} = \frac{M_z}{EI_z} \quad (13-1)$$



**Fig. 13.1**

L'arc GG' ayant pour longueur dl:

$$dl = R d\theta \quad (13-2)$$

$$\text{ou } \frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dl} \quad (13-3)$$

La tangente de la courbure  $v$  au point  $x$  est défini par :

$$\frac{dv}{dx} = \operatorname{tg} \theta \quad (13-4)$$

Pour des angles de rotations très petits on assimile :

$$\operatorname{tg} \theta = \theta \quad (13-5)$$

$$\text{et } dl = dx \quad (13-6)$$

En remplaçant (13-5) et (13-6) par leurs valeurs dans (13-3) et (13-4) on obtient :

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} \quad (13-7)$$

$$\text{et } \theta = \frac{dv}{dx} \quad (13-8)$$

En dérivant (13-8) par rapport à  $x$  :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (13-9)$$

Des équations (13-7) et (13-9), il en résulte :

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v}{dx^2} \quad (13-10)$$

L'équation (13-1) s'écrira donc:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_z}{EI_z} \quad (13-11)$$

C'est l'équation différentielle de la ligne élastique que l'on intègre dans chaque cas particulier afin de déterminer les flèches des poutres.

Le signe dans l'équation (13-11) correspond à :

- (1)  $x$  et  $v$  sont positifs vers la droite et vers le bas respectivement.
- (2) l'angle  $\theta$  est positif dans le sens des aiguilles d'une montre à partir de l'axe  $x$ .
- (3)  $M$  positif quand il tend les fibres inférieures.
- (4) la courbure est positive si la courbe est concave vers le bas ( $M > 0$  et  $1/R > 0$ )

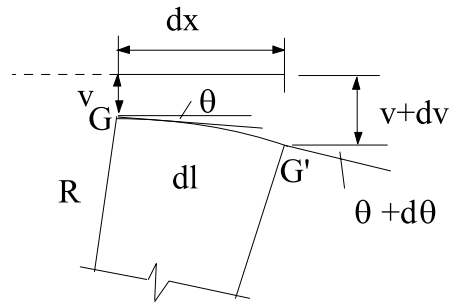


Fig. 13.2

On dispose de plusieurs méthodes pour la résolution de l'équation différentielle de la déformée. Les procédures les plus utilisées seront présentées ci-après.

### 13.3 METHODE D'INTEGRATION DIRECTE

L'équation de la déformée peut être obtenue par intégration successive de l'équation différentielle (13-11).

En intégrant une première fois on obtient l'équation de l'angle de rotation :

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = \int -\frac{M(x)}{EI} dx + C_1 \quad (13-12)$$

En intégrant une seconde fois il vient :

$$v(x) = \int \left[ \int -\frac{M(x)}{EI} dx + C_1 \right] dx + C_2 \quad (13-13)$$

Où  $C_1$  et  $C_2$  sont les constantes d'intégration à déterminer à partir des conditions aux limites.

Il faut noter que dans le cas des poutres ayant plusieurs tronçons dont chacun possède sa propre équation du moment, il faut substituer l'expression de  $M$  dans chacune des équations différentielles et procéder à l'intégration. Les constantes d'intégration dans ce cas sont déterminées en utilisant les conditions aux appuis des extrémités de la poutre et aux conditions de continuité aux limites des tronçons.

#### 13.3.1 Applications

##### Exemple 1

Déterminer l'expression de la déformée d'une console soumise à une charge uniformément répartie sur toute sa longueur.

##### Solution

Le moment fléchissant d'une section située à une distance  $x$  de l'extrémité libre est:

$$M = -q \frac{x^2}{2}$$

En intégrant deux fois l'équation différentielle de la déformée on obtient:

$$EIv''(x) = -M = q \frac{x^2}{2}$$

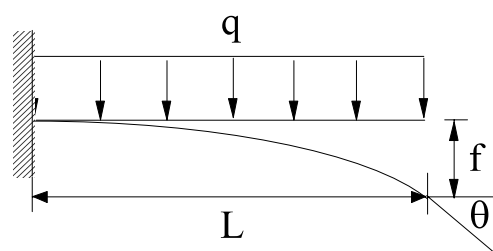


Fig. 13.3

$$EIv'(x) = EI\theta(x) = q \frac{x^3}{6} + C_1$$

$$EIv(x) = \frac{qx^4}{24} + C_1x + C_2$$

Conditions aux limites :

$$v'(L) = 0 \Rightarrow q \frac{L^3}{6} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -q \frac{L^3}{6}$$

$$v(L) = 0 \Rightarrow q \frac{L^4}{24} - \frac{qL^4}{6} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{3qL^4}{24} = \frac{qL^4}{8}$$

$$\text{D'où } v = \frac{1}{EI} \left[ \frac{qx^4}{24} - \frac{qL^3}{6}x + \frac{qL^4}{8} \right] \quad \text{et} \quad v'(x) = \theta(x) = \frac{1}{6EI} (qx^3 - qL^3)$$

$$\text{à l'extrémité libre } x = 0 \Rightarrow \theta_{\max} = \frac{-qL^3}{6EI} \quad \text{et} \quad f = \frac{qL^4}{8EI}$$

### Exemple 2

Déterminer les équations de la déformée et déduire la flèche maximale pour une poutre reposant librement sur deux appuis et soumise à une charge concentrée à une distance  $a$  de l'appui A (Fig. 13.4).

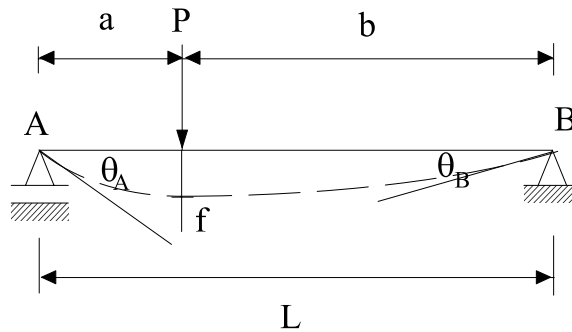


Fig. 13.4

### Solution

Les réactions aux appuis sont:

$$R_A = P \frac{b}{L} \quad R_B = P \frac{a}{L}$$

Equation de la déformée de A vers B: Dans ce cas il existe deux expressions différentes du moment fléchissant correspondant aux deux tronçons de la poutre. On écrit donc l'équation de la ligne élastique pour chaque tronçon.

$$EIv_1'' = -\frac{Pb}{L}x \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$EIv_2'' = -\frac{Pb}{L}x + P(x - a) \quad (a \leq x \leq L)$$

1<sup>ère</sup> Intégration :

$$EIv_1' = -\frac{Pbx^2}{2L} + C_1 \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$EIv'_2 = -\frac{Pbx^2}{2L} + \frac{P(x-a)^2}{2} + C_2 \quad (a \leq x \leq L)$$

2<sup>e</sup> Intégration :

$$EIv_1 = -\frac{Pb}{6L}x^3 + C_1x + C_3 \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$EIv_2 = -\frac{Pb}{6L}x^3 + \frac{P(x-a)^3}{6} + C_2x + C_4 \quad (a \leq x \leq L)$$

Calculons les constantes d'intégration :

$$(1) \text{ pour } x=0 \quad v_1=0 \Rightarrow C_3=0 \quad (1)$$

$$x=a \quad v'_1=v'_2 \Rightarrow -\frac{Pba^2}{2L} + C_1 = -\frac{Pba^2}{2L} + C_2 \quad (2)$$

$$x=a \quad v_1=v_2 \Rightarrow -\frac{Pba^3}{6L} + C_1a + C_3 = -\frac{Pba^3}{6L} + C_2a + C_4 \quad (3)$$

$$x=L \quad v_2=0 \Rightarrow C_4=0 \quad (4)$$

de (2), il vient  $C_1 = C_2$

de (3), il vient  $C_3 = C_4 = 0$

$$\text{Nous obtenons de (3)} \quad \Rightarrow C_1 = C_2 = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{6L}$$

Après substitution, les équations de la ligne élastique prennent les formes :

$$v_1 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{Pbx}{6L} (L^2 - b^2 - x^2) \right]$$

$$\theta_1(x) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{pb}{6L} (L^2 - b^2 - 3x^2) \right] \quad (0 \leq x \leq a)$$

$$v_2 = \frac{1}{EI} \left[ \frac{pbx}{6L} (L^2 - b^2 - x^2) + \frac{p(x-a)^3}{6} \right]$$

$$\theta_2(x) = \frac{1}{EI} \left[ \frac{pb}{6L} (L^2 - b^2 - 3x^2) + \frac{p(x-a)^2}{2} \right] \quad (a \leq x \leq L)$$

Les angles de rotation aux appuis :

$$\theta_1(0) = \frac{Pb(L^2 - b^2)}{6LEI} = \frac{Pab(L+b)}{6LEI}$$

$$\theta_2(L) = -\frac{Pab(2L-b)}{6LEI}$$

L'angle  $\theta_1$  est maximal pour  $b = \frac{L}{\sqrt{3}}$

Si  $a > b$ , la flèche maximale se situera dans la zone a ( $v_1(x)$ )

$$v_{\max} \Rightarrow \frac{dv(x)}{dx} = \theta(x) = 0 \Rightarrow L^2 - b^2 - 3x^2 = 0$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{L^2 - b^2}{3}} = \sqrt{\frac{a(L+b)}{3}}$$

$$v_{\max} = \frac{pb(L^2 - b^2)^{\frac{3}{2}}}{9\sqrt{3}LEI}$$

Dans le cas où la force P agit au milieu de la poutre ( $a = b = \frac{L}{2}$ )

On obtient alors 
$$f = \frac{pL^3}{48EI}$$

$$\theta_{\max} = \frac{pL^2}{16EI}$$

### 13.4 METHODE DE LA POUTRE CONJUGUEE (FICTIVE) :

La méthode d'intégration directe de l'équation différentielle de la ligne élastique qui est très efficace pour les poutres simples à un seul tronçon, devient laborieuse même pour une poutre à trois tronçons. Pour simplifier les calculs il est parfois utile de se servir d'autres méthodes, comme la méthode des paramètres initiaux ou la méthode grapho-analytique dite méthode de la poutre conjuguée (fictive).

Cette dernière est basée sur l'analogie qui existe entre l'équation différentielle de la déformée et celle qui lie le moment fléchissant à la charge répartie :

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \Leftrightarrow \frac{d^2M(x)}{dx^2} = q(x). \quad (13-14)$$

Pour une poutre donnée, la méthode grapho-analytique consiste à considérer le diagramme des moments fléchissant comme une charge fictive répartie agissant sur une poutre fictive.

La flèche  $v(x)$  et l'angle de rotation  $\theta(x)$  de la poutre donnée sont déterminées respectivement par le rapport du moment fléchissant et de l'effort tranchant dans une section  $x$  de la poutre fictive à la rigidité de la poutre donnée c'est-à-dire :

$$\theta(x) = \frac{T_f(x)}{EI} \quad (13-15)$$

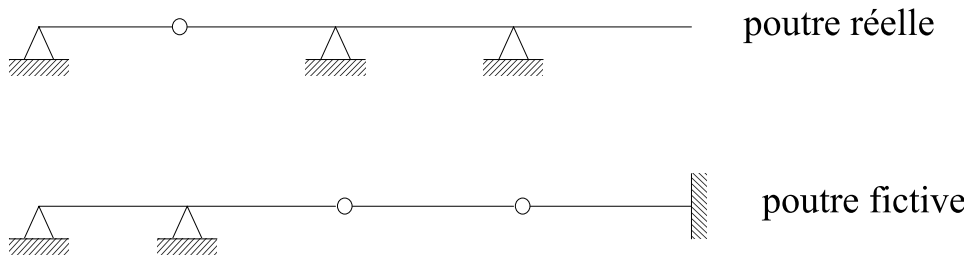
$$v(x) = \frac{M_f(x)}{EI}$$

Où  $T_f(x)$  : l'effort tranchant de la poutre fictive

$M_f(x)$  : moment fléchissant de la poutre fictive

Les règles de construction de la poutre fictive sont les suivantes :

- 1- Un appui à l'extrémité de la poutre réelle reste inchangé pour la poutre fictive.
- 2- Un appui intermédiaire de la poutre réelle est remplacé par une articulation dans la poutre fictive.
- 3- Une articulation de la poutre réelle devient un appui intermédiaire dans la poutre fictive.
- 4- L'encastrement de la poutre réelle est pris comme extrémité libre dans la poutre fictive.
- 5- Une extrémité libre de la poutre réelle devient un encastrement dans la poutre fictive.



Le diagramme positif du moment fléchissant de la poutre réelle agit sur la poutre fictive de haut en bas et le diagramme négatif du moment fléchissant de la poutre réelle agit sur la poutre fictive de bas en haut.

Il faut noter aussi que cette méthode est efficace pour calculer les déplacements des sections particulières de la poutre, pourvu qu'il soit facile de déterminer les aires et les centres de gravité des diagrammes du moment fléchissant.

### 13.4.1 Applications

#### Exemple 1

On donne  $P$ ,  $L$ ,  $E$  et  $I$

- Déterminer  $\theta_C$ ,  $\theta_A$  et  $f_A$

- Déterminer la charge  $P$  pour que  $f_{\max} \leq \frac{L}{300}$

**Solution**

Les réactions :

$$\sum M_{/A'd} = 0$$

$$V_{C'} \times L + PL \times \frac{L}{2} \times \frac{L}{3} = 0$$

$$\Rightarrow V_{C'} = -\frac{PL^2}{6} \Rightarrow T_{C'} = -V_{C'} = \frac{PL^2}{6}$$

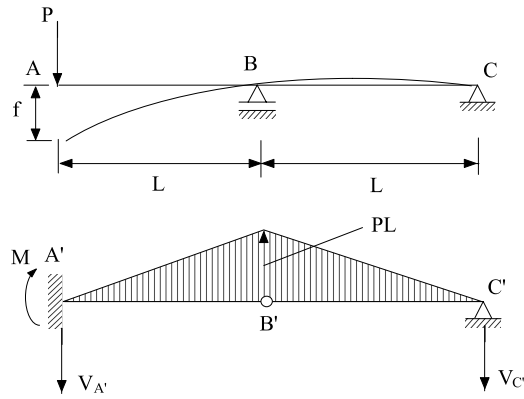
$$V_{A'} = -PL \times L + \frac{PL^2}{6} = \frac{-5PL^2}{6} \Rightarrow T_{A'} = V_{A'} = \frac{-5PL^2}{6}$$

$$M_{A'} = \frac{-PL^2}{6} \times 2L + PL^2 \times L = \frac{2}{3} PL^3$$

$$\text{D'où } \theta_A = \frac{T_{A'}}{EI} = \frac{-5PL^2}{6EI}$$

$$\theta_C = \frac{T_{C'}}{EI} = \frac{PL^2}{6EI}$$

$$f_{\max} = \frac{M_{A'}}{EI} = \frac{2PL^3}{3EI} \leq \frac{L}{1000} \Rightarrow P \leq \frac{EI}{2L^2}$$


**Fig. 13.6**
**Exemple 2**

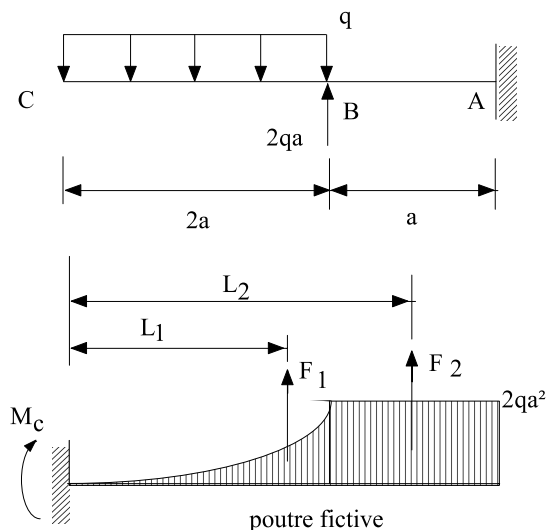
Déterminer la flèche au point C et la rotation au point B de la poutre ci-contre.

**Solution:**

On détermine les aires des diagrammes des moments de chaque tronçon et les bras de levier par rapport à C.

$$F_1 = \frac{4}{3} qa^3$$

$$L_1 = \frac{3}{2} a$$


**Fig. 13.7**

Le centre de gravité de la section 1:  $\left(\frac{3L}{4}, \frac{L}{4}\right)$



L'aire de la section 1:  $\Omega = \frac{hL}{3}$

$$F_2 = 2qa^3 \quad L_2 = \frac{5}{2}a$$

$$F_3 = qa^3 \quad L_2 = \frac{5}{2}a$$

$$M_c = \sum F_i L_i \Rightarrow v_c = \frac{7qa^4}{EI}$$

$$T_B = F_2 \Rightarrow \theta_B = \frac{2qa^3}{EI}$$

### 13.5 METHODES DES PARAMETRES INITIAUX (MacAulay)

La méthode des paramètres initiaux est basée sur le principe de la fonction discontinue pour la détermination d'une expression unique du moment fléchissant d'une poutre de plusieurs tronçons. L'intégration directe de cette expression résulte en deux constantes  $C_1 = \theta_0$  et  $C_2 = v_0$  qui s'avèrent être les paramètres initiaux.

Ainsi si on prend l'origine des coordonnées aux points situés à l'extrême gauche de la poutre, les expressions de  $v(x)$  et  $\theta(x)$  sont données par les équations :

$$EI\theta(x) = EI\theta_0 + \sum M \frac{(x-a)}{1!} + \sum P \frac{(x-b)^2}{2!} + \sum q_c \frac{(x-c)^3}{3!} - \sum q_d \frac{(x-d)^3}{3!} + \sum q'_c \frac{(x-c)^4}{4!} - \sum q'_d \frac{(x-d)^4}{4!} + \dots$$

$$EIv(x) = EIv_0 + EI\theta_0 \frac{x}{1!} + \sum \frac{M(x-a)^2}{2!} + \sum \frac{P(x-b)^3}{3!} + \sum \frac{q_c(x-c)^4}{4!} - \sum \frac{q_d(x-d)^4}{4!} + \sum \frac{q'_c(x-c)^5}{5!} - \sum \frac{q'_d(x-d)^5}{5!} + \dots,$$

Où :

$M$  : moments concentrés extérieurs ou à l'encastrement

$a$  : distance entre l'origine des coordonnées et les points d'application des moments  $M$

$p$  : les forces concentrées y compris les réactions

$b$  : distances entre l'origine des coordonnées et les points d'application des forces  $P$

$q_c, q_d$  : respectivement, les intensités au début et à la fin de la charge répartie

$q'_c, q'_d$  : respectivement, les valeurs des dérivées de  $q$  aux points  $x = c$  et  $x = d$

Les directions des charges sont positives comme indiquées ci-dessous :

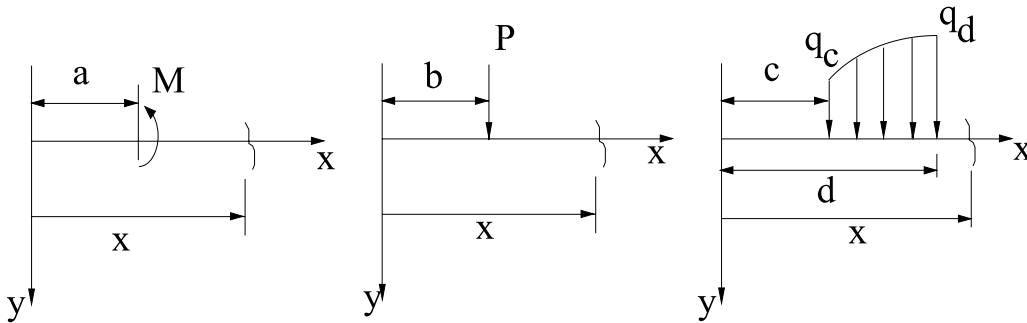


Fig. 13.8

Les deux paramètres initiaux  $v_0$  et  $\theta_0$  sont déterminés par les conditions d'appui de la poutre.

**13.5.1 Application**

Déterminer la flèche maximale et les rotations aux appuis de la poutre représentée sur la Fig. 13.9.

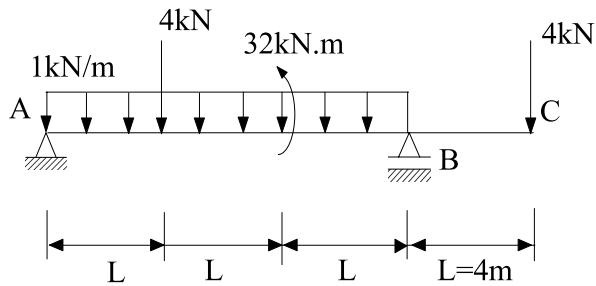


Fig. 13.9

**Solution**

Par les équations de la statique on détermine les réactions aux appuis et on trouve:

$$R_A = 10 \text{ kN}$$

$$R_B = 10 \text{ kN}$$

$$EI\theta(x) = EI\theta_0 - \frac{10}{2}x^2 + \frac{x^3}{6} - \frac{(x-12)^3}{6} + 2(x-4)^2 + 32(x-8) - 5(x-12)^2$$

$$EIv(x) = EIv_0 + EI\theta_0 x - \frac{5}{3}x^3 + \frac{x^4}{24} - \frac{(x-12)^4}{24} + \frac{2(x-4)^3}{3} + 16(x-8)^2 - \frac{5}{3}(x-12)^3$$

$$EIv(0) = 0 \Rightarrow EIv_0 \Rightarrow v_0 = 0$$

$$EIv(12) = 0 \Rightarrow \theta_0 = \frac{118.22}{EI}$$

$$\theta(0) = \theta_0 = \frac{118.22}{EI}$$

$$\theta(12) = -\frac{57.78}{EI}$$

La flèche maximale :

$\theta(x) = 0 \Rightarrow$  équation polynomiale de degré 3.

X	0	4	8	12	16
EI $\theta(x)$	118.22	48.89	-84.4	-57.78	-25.78

Donc  $\theta(x) = 0$  pour  $x \in ] 4 , 8 [$

En utilisant la méthode de dichotomie, on converge vers  $x = 5.48$

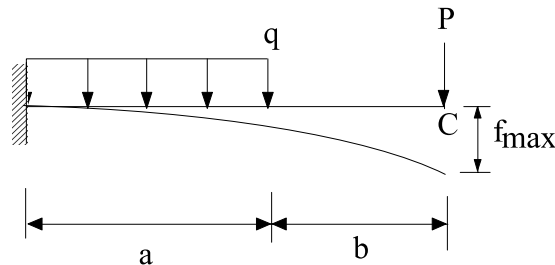
$$\Rightarrow v(5.48) = + \frac{414}{EI}$$

### 13.6 SUPERPOSITION DES DEFORMATIONS

Les équations différentielles de la déformée sont des équations linéaires c'est-à-dire tous les termes de  $v$ ,  $v'$  et  $v''$  sont du premier ordre. Les déformations dues à plusieurs cas de charges peuvent être donc superposées ou cumulées. Cette méthode est surtout utilisée quand le chargement est composé de plusieurs cas de charge élémentaire ou les déformations sont données dans les aides mémoires de la RDM.

**Exemple :**

Déterminer la flèche maximale de la poutre ci-dessous.



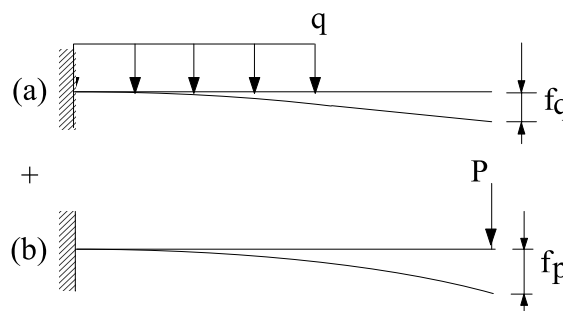
**Solution**

$$f_{\max} = f_q + f_p$$

$$f_q = \frac{qa^3(4L - a)}{24EI}$$

$$f_p = \frac{PL^3}{3EI}$$

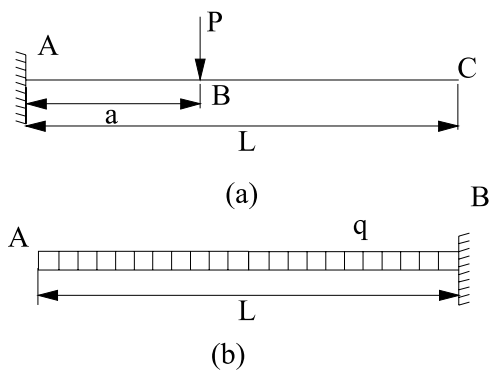
$$f_{\max} = \frac{PL^3}{3EI} + \frac{qa^3(4L - a)}{24EI}$$



**EXERCICES / chapitre 13**

**13.1** Déterminer les équations des déformées et des rotations et calculer les valeurs caractéristiques des poutres de la Fig. E13.1.

✓ (a)  $v_c = Pa^2(3L-a)/6EI$ ,  
 $\theta_b = -Pa^2/2EI$  ; (b)  $v_b = qL^2/30EI$ ,  
 $\theta_b = -qL^2/24EI$



**Fig. E13.1**

**13.2** En utilisant les équations différentielles de la déformée, déterminer la flèche maximale d'une poutre simplement appuyée aux extrémités sous une charge uniformément répartie sur toute la longueur.

Si la poutre a une section symétrique en I, et constituée d'un matériau dont le module d'élasticité est de  $185 \times 10^9 \text{ N/m}^2$  avec une contrainte admissible de  $125 \times 10^6 \text{ N/m}^2$ , montrer que la flèche maximale peut-être écrite sous la forme  $f_{\max} = KL^2/d$ , où L est la portée de la poutre et d la hauteur de la section. Trouver aussi la valeur de K.

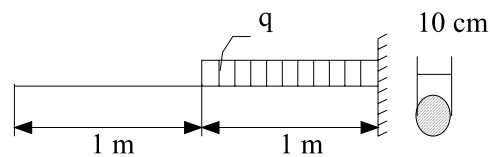
✓  $K = 141 \times 10^{-6}$

**13.3** Soit une barre de section carrée de coté a, constituée d'un matériau de densité d. Elle est encastree à une extrémité et libre à l'autre. Calculer sa longueur L pour que son poids propre ne provoque pas une flèche supérieure à  $L/200$ .

✓  $L \leq [EI / 25 dga^2]^{1/3}$

**13.4** Déterminer la charge maximale q uniformément répartie sur la console de la Fig. E13.4, sachant que la flèche admissible est de  $[f] = 10 \text{ mm}$ .

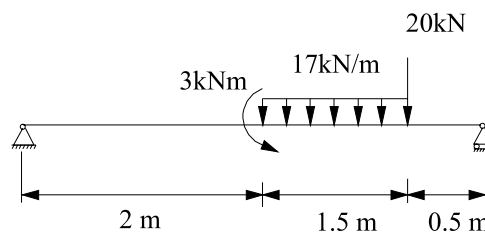
✓  $q \leq 538.5 \text{ N/m}$ .



**Fig. E13.4**

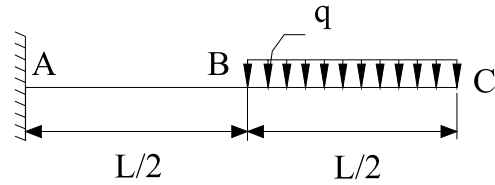
**13.5** Calculer la flèche d'une section située à 2.3 m de l'extrémité gauche de la poutre de la Fig. E13.5. On donne  $E = 7 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ ,  $I = 6 \times 10^6 \text{ mm}^4$ .

✓  $f = 64.2 \text{ mm}$



**Fig. E13.5**

**13.6** Une poutre ABC de longueur L est simplement appuyée en A et B laissant le tronçon BC en porte à faux. La poutre qui se déforme sous l'effet de son poids propre devrait rester horizontale au niveau de B.



**Fig. E13.8**

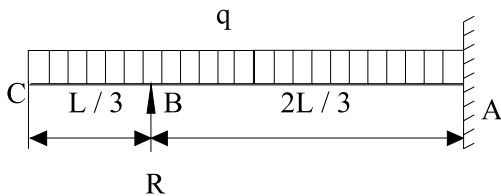
Déterminer la position de l'appui B.

✓  $AB = 2L/3$

**13.7** Le déplacement d'un point B situé à L/3 de l'extrémité libre d'une console uniformément chargée est empêché par l'application d'une force R (Fig. E13.7).

Trouver la valeur de R et le rapport de l'angle de rotation à l'extrémité libre par rapport à celui du point B.

✓  $R = 17qL/24, \theta_c/\theta_b = 1/3$



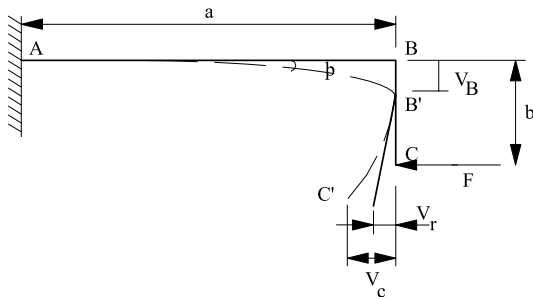
**Fig. E13.7**

**13.9** Une poutre coudée est encastree en A (Fig. E13.9). Sous l'action d'une force F la déformée prend la forme AB'C'.

Exprimer les flèches  $V_b$  et  $V_c$  ainsi que la rotation  $\theta_b$

Exprimer la flèche  $V_r$  si BC était infiniment rigide.

✓  $V_b = F(a^2b/2EI), \theta_b = F(ab/EI), V_c = F(b^2/EI)(a+b/3), V_r = b\theta_b = F(ab^2/EI)$



**Fig. E13.9**

**13.8** En utilisant la méthode de la poutre fictive, calculer la déformation et l'angle de rotation au point C de la poutre figurant sur Fig. E13.8.

✓  $\theta_c = 7qL^3/48EI, V_c = 41qL^4/384 EI$