

Chapitre 12

SYSTEMES EN TREILLIS

12.1 GENERALITES ET DEFINITIONS

Les systèmes en treillis ou réticulés sont des structures composées de barres articulées entres-elles à leurs extrémités. Les articulations communes à plusieurs barres sont les noeuds du système. Ce type de structures est utilisé dans le domaine du génie civil, et généralement pour les structures en charpente métallique ou en bois. Les fermes des toitures des hangars et des grandes salles de sport ainsi que des ponts et pylônes sont des exemples de structures en treillis (Fig. 12.1). Une des caractéristiques fondamentales de ces systèmes c'est qu'elles présentent une rigidité importante suivant leurs plans sans être pénalisant en terme de poids propre.

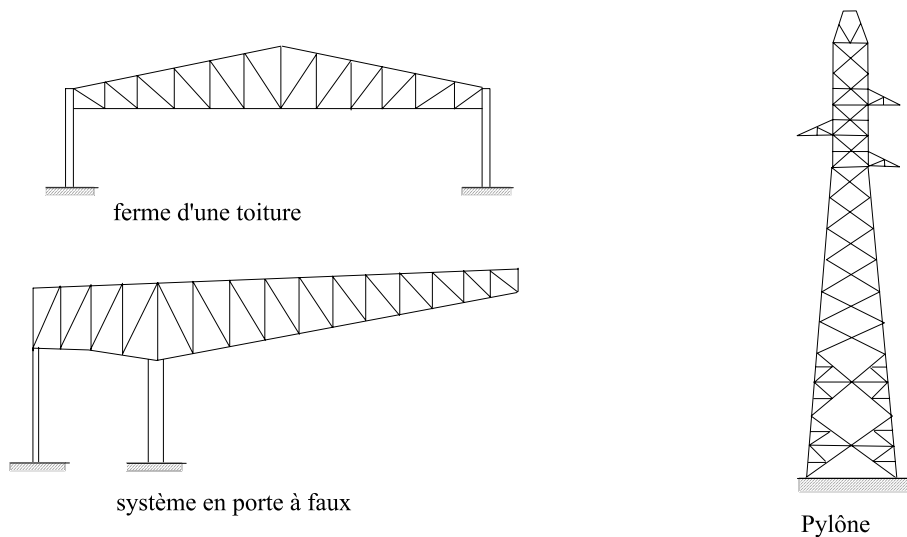


Fig. 12.1

On appelle les éléments (extérieurs) d'un système en treillis les membres et la forme intérieure le réseau (Fig. 12.2).

- S_i: membrane supérieure
- I_i: membrane inférieure
- V_i: barre verticale
- D_i: barre diagonale

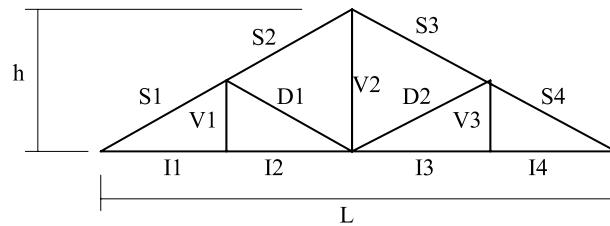


Fig. 12.2

Un système en treillis est appelé ferme si $\frac{h}{L} = 0.1$ à 0.5 et la forme soit triangulaire, polygonale ou curviligne. Par contre si $\frac{h}{L} < 0.1$ le système est dit poutre à treillis, en général ses membrures sont parallèles.

On distingue les systèmes de barres spatiaux et plans. Dans ce chapitre nous nous bornerons à l'étude des systèmes en treillis plans: Les noeuds et les forces extérieures sont contenus dans un même plan.

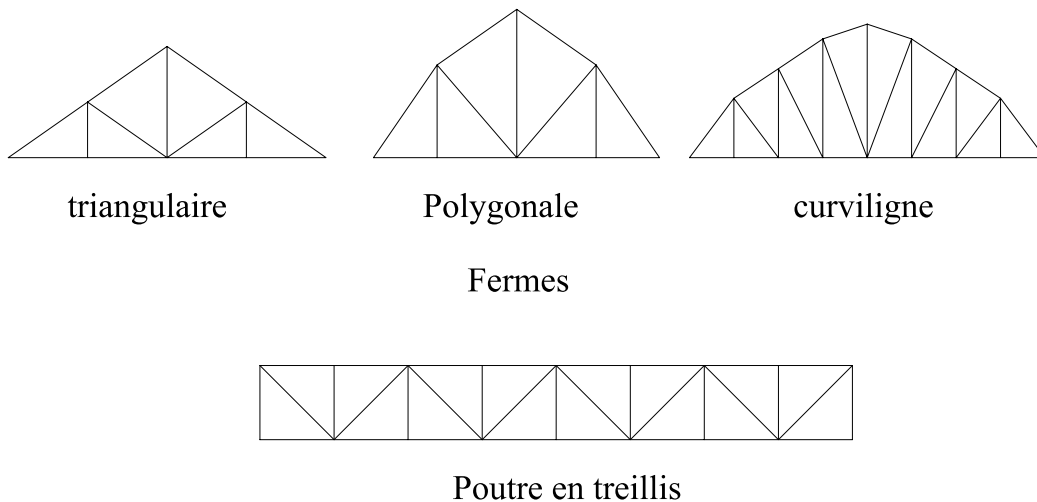


Fig. 12.3

12.2 ETUDE CINEMATIQUE DES SYSTEMES EN TREILLIS

Les systèmes de barres se subdivisent en formes géométriquement déformables et indéformables; ces derniers en isostatiques et hyperstatiques. Le système est dit géométriquement indéformable s'il ne change pas de forme et de position sous l'action des charges (Fig. 12.4 c,d). Dans le cas contraire le système est dit géométriquement déformable ou mécanisme (fig.12.4.a,b).

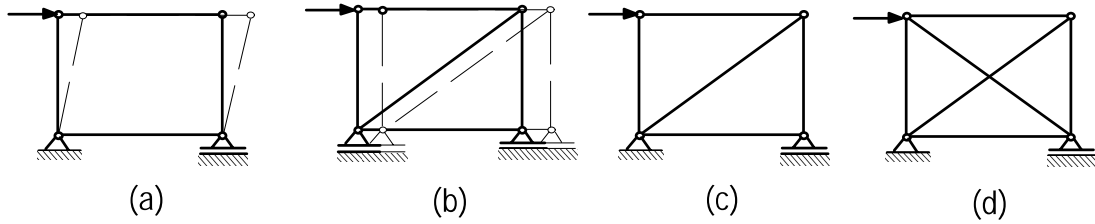


Fig. 12.4

Le système indéformable est isostatique si les réactions d'appuis se déterminent à l'aide des seules conditions d'équilibre. Dans le cas contraire le système est dit hyperstatique. Pour déterminer la catégorie du système, on utilise l'étude cinématique qui peut être exprimée par la formule suivante:

$$L = 3b - 3r - 2a - l$$

L : le degré de stabilité du système.

b : le nombre de barres .

r : le nombre de noeuds rigides simples (assemblant 2 barres)

a : le nombre d'articulations simples (assemblant 2 barres). Pour chaque noeud, a est égal au nombre d'extrémités de barres concourant au noeud -1

l : le nombre de réactions d'appuis simples.

Si $L > 0$ le système est géométriquement déformable

Si $L = 0$ le système est isostatique

Si $L < 0$ le système est hyperstatique, et le degré d'hyperstatique $H = -L$

Cette condition est nécessaire mais pas suffisante pour avoir un système indéformable et isostatique, car elle donne uniquement le nombre nécessaire des liaisons pour former un système isostatique. Il faut donc toujours vérifier l'indéformabilité du système (étude géométrique).

Exemple:

Faire l'étude cinématique du système en treillis représenté sur la Fig. 12.5

$$L = 3 \times 13 - 3 \times 0 - 2 \times 18 - 3 = 0$$

on note que le nombre d'articulation simple est égale au nombre des angles que forment les barres du treillis entre elles.

$L = 0$ le système est donc isostatique et indéformable, car il est constitué de barres formant des triangles et il est lié par des liaisons dont leurs axes ne se coupent pas en un point.

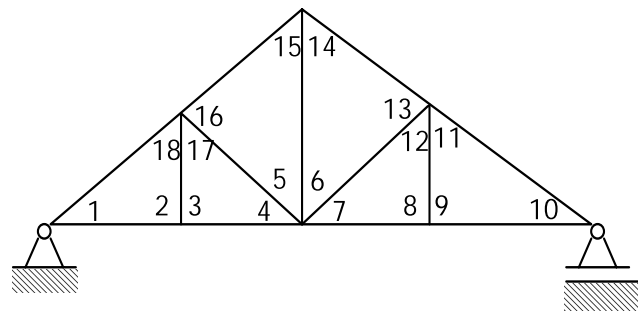


Fig. 12.5

12.3 ETUDE DES SYSTEMES EN TREILLIS

Les réactions d'appuis sont déterminées à partir des équations de la statique. Les efforts dans les barres cependant, sont déterminés par l'une des méthodes suivantes:

12.3.1 Méthode des sections (Gullmann)

Elle consiste à couper le système en deux parties, et considérer les équations d'équilibre de la statique de l'une des deux parties. La section devrait être choisie pour qu'il y ait au maximum trois efforts inconnus.

Exemple:

Déterminer les efforts dans les barres S_2 , D_1 et I_2 du système de la Fig.12.6

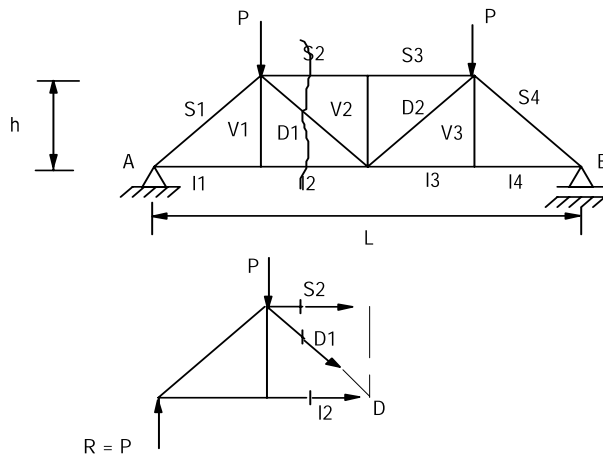


Fig. 12.6

Solution

On montre que le système est isostatique et indéformable. On sectionne le système au niveau des barres où on veut déterminer les efforts. On établit ensuite l'équilibre de la partie gauche avec les trois inconnues S_2 , D_1 et I_2 .

$$\sum M_{/D} = 0 \Rightarrow h \times S_2 + \frac{PL}{2} - \frac{PL}{4} = 0 \Rightarrow S_2 = -\frac{PL}{4h}$$

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow P - P - D_1 \sin \alpha = 0 \Rightarrow D_1 = 0$$

$$\sum F_h = 0 \Rightarrow S_2 + I_2 + D_1 \cos \alpha = 0 \Rightarrow I_2 = -S_2 = \frac{PL}{4h}$$

12.3.2 Méthode des noeuds

On établit l'équilibre des noeuds après avoir remplacé chaque barre concourant au noeud par l'effort correspondant. On détermine ainsi les efforts inconnus qui ne devraient pas être plus de deux par noeud.

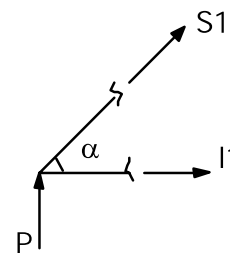
Exemple

Considérons le noeud A du système de la Fig. 12.6.

Les équations d'équilibre du noeud s'écrivent:

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow P + S_1 \sin \alpha = 0 \Rightarrow S_1 = -\frac{P}{\sin \alpha}$$

$$\sum F_h = 0 \Rightarrow I_1 + S_1 \cos \alpha = 0 \Rightarrow I_1 = -S_1 \cos \alpha = P \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$



Remarque:

On peut combiner la méthode des sections avec celle des noeuds lors de la résolution d'un système en treillis.

12.3.3 Application

Déterminer les efforts du système représenté sur la Fig.12.7

1 Etude cinématique

$$L=3 \times 13 - 2 \times 18 - 3 = 0$$

Le système est isostatique.

2 Détermination des efforts

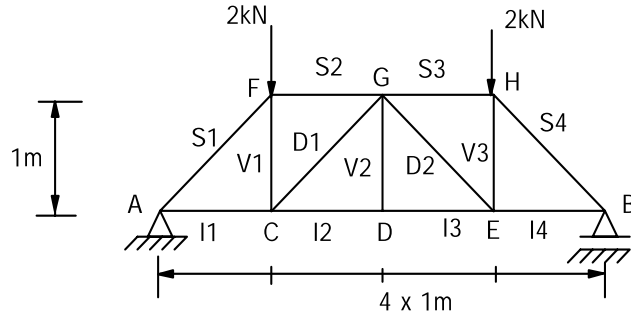
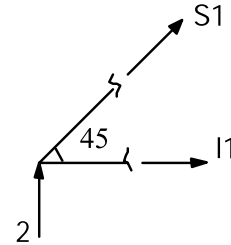


Fig. 12.7

Equilibre du noeud A :

$$2 + S_1 \sin 45 = 0 \Rightarrow S_1 = -\frac{2}{\sqrt{2}} \times 2 = -2\sqrt{2} \text{ KKN}$$

$$I_1 + S_1 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \Rightarrow I_1 = -S_2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 2 \text{ KKN}$$

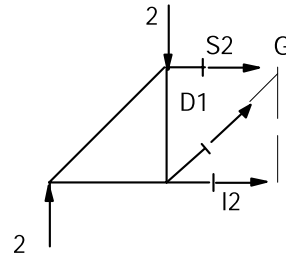


Section 1.1 :

$$\sum M_G = 0 \Rightarrow 2 \times 1 - 2 \times 2 + 1 \times I_2 = 0 \Rightarrow I_2 = 2 \text{ KKN}$$

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow 2 - 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} D_1 = 0 \Rightarrow D_1 = 0$$

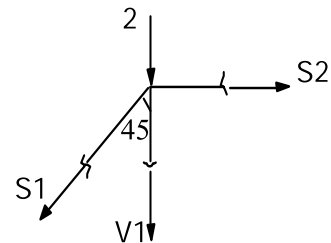
$$\sum F_h = 0 \Rightarrow S_2 + I_2 = 0 \Rightarrow -I_2 = S_2 = -2 \text{ KKN}$$



Equilibre du noeud F :

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} S_1 + V_1 + 2 = 0 \Rightarrow V_1 = 0$$

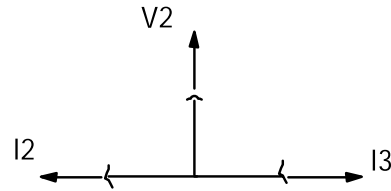
$$\sum F_h = 0 \Rightarrow S_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_1 = -2 + 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$



Equilibre du noeud D :

$$\sum F_v = 0 \Rightarrow V_2 = 0$$

$$\sum F_h = 0 \Rightarrow I_3 = I_2 = -2\text{KN}$$



Par symétrie :

$$S_3 = S_2 = 0$$

$$D_2 = D_1 = 0$$

$$S_4 = S_1 = -2\sqrt{2}\text{KN}$$

$$V_3 = V_1 = 2\text{KN}$$

$$I_4 = I_1 = -2\text{KN}$$

12.3.4 Méthode graphique de "Cremona"

L'analyse des systèmes en treillis ayant un nombre élevé de barres nécessite un effort considérable de calcul et de concentration. A l'époque où on n'avait pas de moyens de calcul, la tâche était encore plus difficile. Pour surmonter ce problème, on avait procédé par des méthodes graphiques, qui avec des moyens de mesure ordinaire, on peut obtenir une bonne approximation des efforts. Cette méthode est basée essentiellement sur la méthode des noeuds qui consiste à représenter l'équilibre des noeuds par des polygones des forces.

Etapas de résolution :

- 1/ Construction du schéma du système selon une échelle de longueur .
- 2/ Désignation alphabétique des noeuds du système .
- 3/ Numérotation des intervalles entre les forces extérieures y compris les réactions dans le sens des aiguilles d'une montre, ensuite les mailles du réseau.

Ainsi chaque barre et par conséquent chaque effort et chaque force extérieure peut-être caractérisé par les deux chiffres entre lesquels il est situé.

4/ Construction du polygone des forces extérieures selon une échelle de force choisie. En parcourant les forces dans le sens des aiguilles d'une montre et en représentant chaque force par un vecteur dont le point initial et final correspond respectivement aux chiffres situés avant et après la force, on obtient ainsi un polygone fermé.

5/ Construction des polygones des efforts internes pour chaque noeud, en commençant par le noeud où il n'y a pas plus de deux inconnues.

6/ L'intensité de l'effort dans chaque barre est égale à la longueur du segment -à échelle des forces- correspondant aux deux nombres caractérisant la barre.

7/ Le sens de l'effort est déterminé par le sens de parcours du premier au deuxième point correspondant aux chiffres caractérisant l'effort quand on tourne autour du noeud de l'une des extrémités de la barre dans le sens des aiguilles d'une montre.

L'effort est une compression si le sens est rentrant au noeud et il est représenté par

$\leftarrow \longrightarrow$. Si le sens est sortant du noeud l'effort est une traction et, est représenté par

$\rightarrow \leftarrow$. Par contre si les chiffres caractérisant la barre sont confondus en un point l'effort est nul et il est représenté par $\text{---} / \text{---}$.

Remarques

Si nous devons déterminer les efforts dans toutes les barres du système, il convient d'utiliser la méthode des noeuds sous la forme analytique ou graphique (Cremona). Si par contre il est nécessaire de déterminer quelques efforts, il est préférable d'utiliser la méthode des sections.

12.3.5 Application

Déterminer graphiquement les efforts dans les barres du système à treillis représenté sur la Fig. 12.8.

Solution

- Les étapes de 1 jusqu'à 3 de la méthode graphique sont représentées sur la Fig. 12.8.

- On trace ensuite le diagramme des forces extérieures, qui dans ce cas est un polygone fermé sur une même ligne comme indiqué sur la Fig. 12.9.

- Le diagramme des efforts se détermine en localisant les nombres du réseau, en commençant par le nombre 6 qui se situe sur l'intersection des segments de droites horizontale passant par 1 et diagonale parallèle à AF passant par 2. De la même manière on localise les autres nombres ayant chacun au moins deux nombres adjacents connus (déjà déterminés). On obtient ainsi le diagramme des efforts internes de toutes le barres (Fig.12.9).

Le sens de chaque effort se détermine en appliquant la règle (7) de la méthode de Cremona pour chaque noeud du système. Le signe des efforts dans chaque barre est indiqué par la convention des flèches sur la Fig. 12.10.

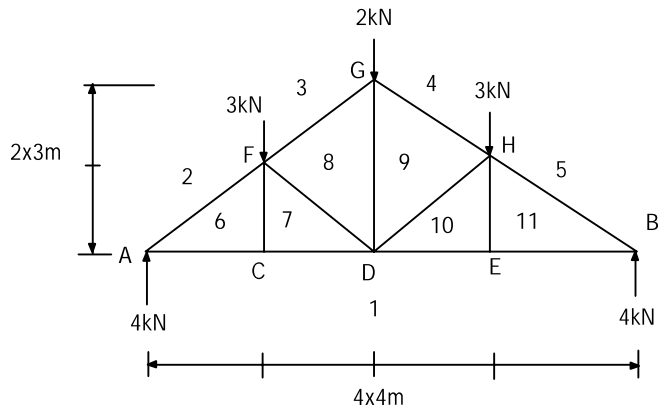


Fig. 12.8

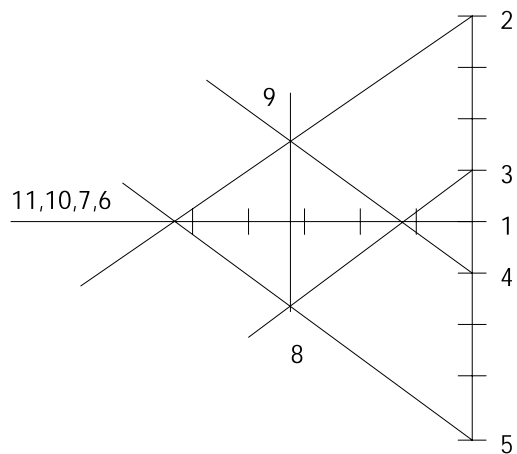


Fig. 12.9

Finalement, on désigne chaque barre par les deux nombres se trouvant de part et d'autre, les distances entre chaque pair de nombres donne la valeur de l'effort dans cette barre. Le tableau ci-dessous résume les efforts dans chaque barre et leurs signes correspondant. Par raison de symétrie, on ne considère que la partie gauche.

- 2-6 AF = -6.7 KN
- 1-6 AC = +5.3 KN
- 3-8 FG = -4.2 KN
- 1-7 CD = +5.3 KN
- 6-7 CF = 0.0
- 7-8 DF = -2.5 KN
- 8-9 DG = + 3.0 KN

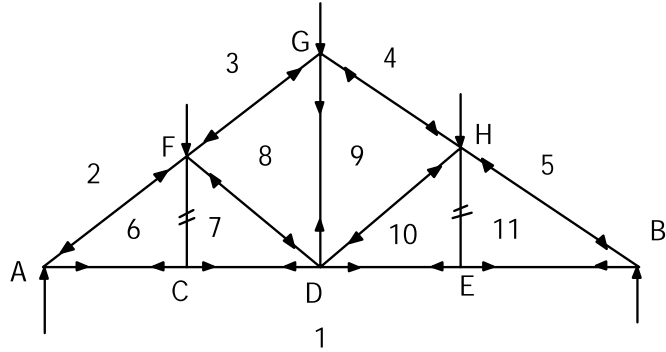


Fig. 12.10

EXERCICES / chapitre 12

12.1 Déterminer par la méthode analytique les efforts dans les barres du système en treillis de la Fig. E12.1.

✓ $AB=100 \text{ kN}$ $AD=141.4 \text{ kN}$
 $BC=141.4 \text{ kN}$ $AE=0$ $BD=-100 \text{ kN}$
 $DE=-200 \text{ kN}$ $CD=-100 \text{ kN}$

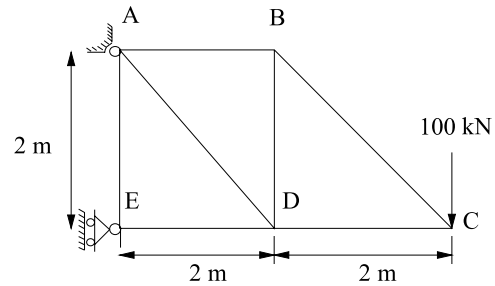


Fig. E12.1

12.2 Déterminer les efforts des barres concourant au point C du système représenté sur la Fig. E12.2.

✓ $BC=-51.07$ $JC=-32.07$
 $IC=70.70$ $CD=-100.0$

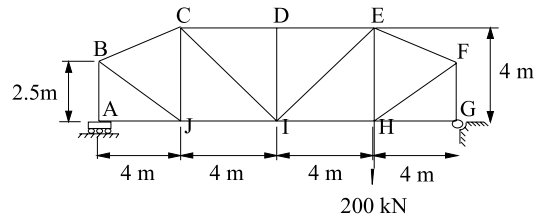


Fig. E12.2

12.3 Déterminer les efforts des barres CE, CD, et FE du treillis d'une toiture en charpente métallique schématisée sur la Fig. E12.3.

✓ $FE=7.3$ $CE=13.8$ $DC=-20.4$

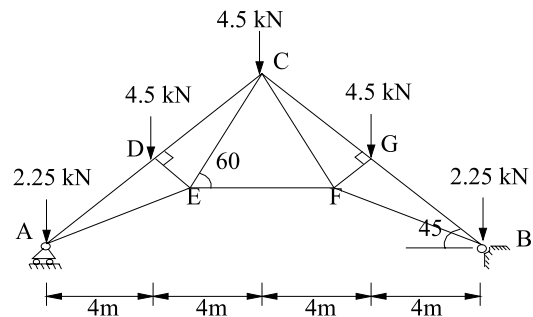


Fig. E12.3

12.4 Vérifier la résistance et la stabilité des barres du système de la Fig. E12.4, sachant que toutes les barres sont en acier de section rectangulaire 50mm x 20mm,

$[\sigma] = 160 \text{ N/mm}^2$, $E = 2 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$, $n_{st} = 2$, et $\lambda_{lim} = 100$.

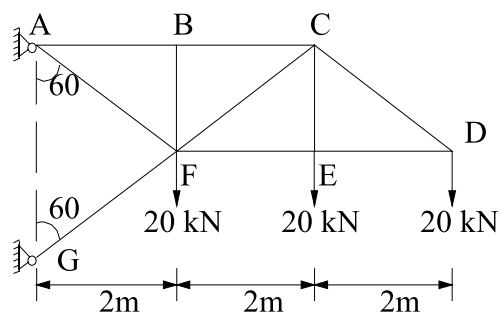


Fig. E12.4

12.5 Déterminer les efforts dans les barres des systèmes (a),(b) et (c) de la Fig. E12.5 par la méthode analytique et graphique (Cremona).

✓ (a) $AC = 600$ $BC = -4160$
 $CD = -1835$ $DE = 2240$ $EC = -2240$
 $AE = 3165$

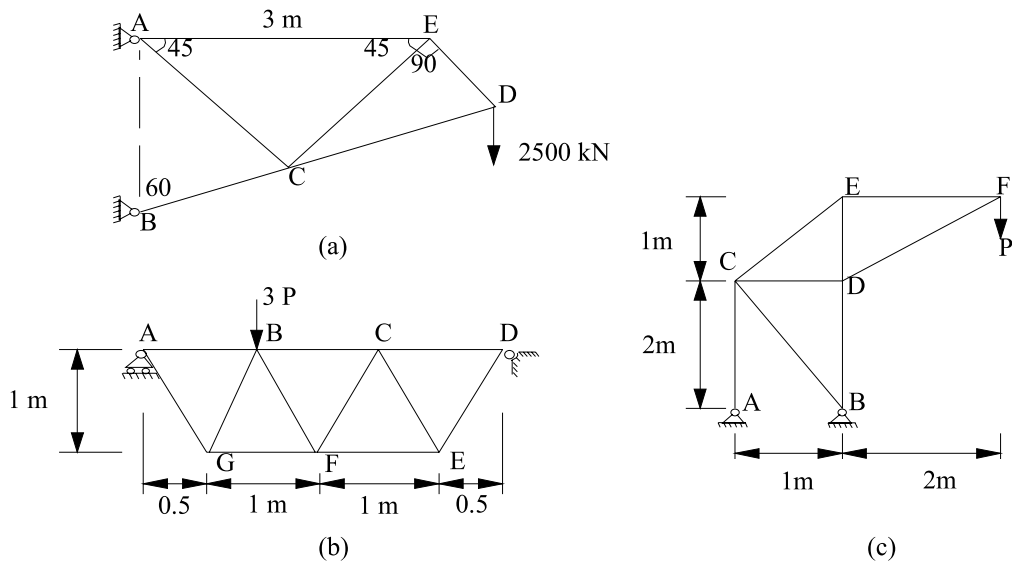


Fig. E12.5