

## *Chapitre 11*

# ***STABILITE DES BARRES ELASTIQUES COMPRIEES (FLAMBEMENT)***

### **11.1 GENERALITES**

Les éléments d'une structure peuvent se détruire sous l'effet des charges de plusieurs manières différentes. Par exemple sous l'effet d'une flexion ou d'une traction excessive un élément ductile se rompt, alors qu'un autre élément composé d'un matériau fragile se brise. Ainsi des fractures peuvent apparaître dans un élément soumis à des charges cycliques. Dans la plupart des cas que nous avons vu jusque là les modes de rupture peuvent être évités en limitant les contraintes et les déformations aux limites admissibles. La résistance et la rigidité d'un élément sont donc les critères importants dans la conception des structures.

L'expérience courante montre qu'une barre longue soumise à un effort de compression peut se rompre par un phénomène de courbure de grande amplitude: *Le flambement*.

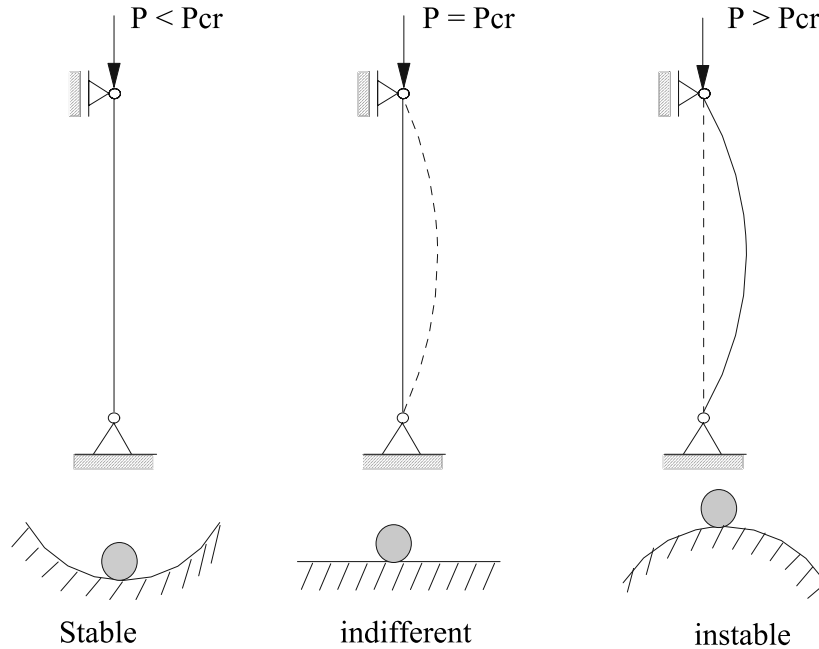
Ce chapitre est consacré à l'étude de ce phénomène d'instabilité des poutres élancées comprimées.

### **11.2 EQUILIBRE ELASTIQUE (STABLE ET INSTABLE)**

L'équilibre élastique est stable si le corps après déformation tend à revenir à son état initial quand on élimine l'action extérieure qui était à l'origine de cette déformation.

Un équilibre est instable si sous l'action d'une sollicitation quelconque, le corps en déformation continue de se déformer dans le même sens que cette déviation imprimée et ne revient pas à son état initial lorsque la sollicitation cesse son action. Entre ces deux états d'équilibre se trouve un état transitoire dit *critique*, ou un équilibre indifférent: le corps peut conserver la forme initiale ou bien la perdre, poussé par une sollicitation aussi petite qu'elle soit [1].

La Fig. 11.1 montre les cas possibles de déformation d'une poutre axialement chargée, ainsi qu'une analogie représentée par l'équilibre d'une boule sur des surfaces concaves, convexes ou planes qui correspond respectivement aux états d'équilibre stables, instables ou indifférents.



**Fig. 11.1**

On appelle charge critique  $P_{cr}$ , la charge qui, une fois dépassée, provoque la perte de stabilité de la forme initiale du corps. Pour assurer la stabilité des éléments en compression il faut donc limiter la force de compression à la force critique (souvent, la rupture des éléments d'une structure est attribuée à une instabilité élastique et non à une insuffisance de résistance de la part du matériau).

La condition de stabilité s'écrit donc:

$$P \leq [P]_s \quad \text{avec} \quad [P]_s = P_{cr} / n_s \quad (11-1)$$

$n_s$  étant le coefficient de la marge de stabilité.

### 11.3 FORCE CRITIQUE

Considérons une barre de longueur  $L$  et de section  $S$  articulée à ses extrémités et soumise à un effort de compression (Fig. 11.2). L'expression de la force critique  $P_{cr}$  est déterminée à partir de l'équation différentielle de la déformée de la barre:

$$EI_{\min} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -M(x) \quad (11-2)$$

Où

$I_{\min}$  : le plus petit moment d'inertie de la section de la barre (car le flambement se produira dans le plan de plus faible rigidité de flexion)

$v(x)$ : la flèche

$M(x)$ : moment fléchissant égal à  $M(x) = P \times v(x)$  (11-3)

On remplace  $M(x)$  dans (11.2)

$$EI_{\min} \frac{d^2v(x)}{dx^2} + Pv(x) = 0 \quad (11-4)$$

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} + k^2v(x) = 0 \quad (11-5)$$

$$\text{Avec } k^2 = \frac{P}{EI_{\min}} \quad (11-6)$$

La solution générale de cette équation est:

$$v(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (11-7)$$

Reste à déterminer les constantes d'intégration A et B à partir des conditions aux limites:

$$v(0) = 0 \quad (11-8)$$

$$\text{et } v(L) = 0 \quad (11-9)$$

La première condition donne  $B = 0$  et la seconde donne:

$$A \sin kL = 0 \quad (11-10)$$

Si  $\sin kL \neq 0$ , on doit avoir  $A = 0$  et  $v = 0$ .

$$\text{Si } \sin kL = 0 \quad (11-11)$$

Alors A peut être quelconque

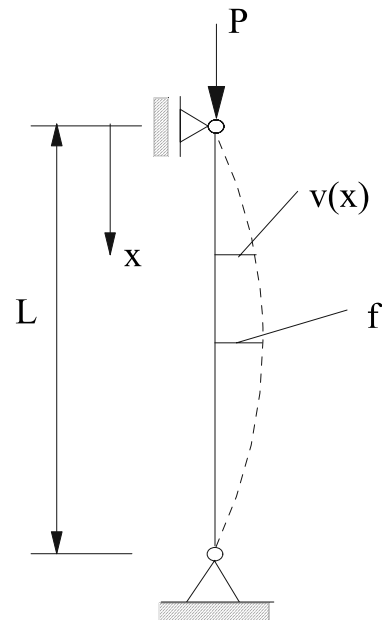
La solution de l'équation (11-11) est alors:

$$\Rightarrow kL = n\pi \quad n: \text{entier arbitraire} \quad (11-12)$$

$$k^2L^2 = n^2\pi^2 \quad (11-13)$$

D'après la définition (11-6) de k, la valeur de la charge critique:

$$P_{\text{cr}} = \frac{n^2\pi^2EI_{\min}}{L^2} \quad (11-14)$$



**Fig. 11.2**

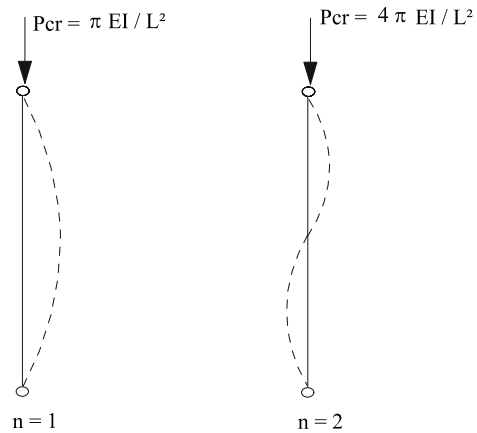
La charge critique fondamentale correspond à  $n=1$

$$P_{\text{cr1}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{L^2} \quad (11-15)$$

L'équation de la déformée correspondante:

$$v(x) = A \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (11-16)$$

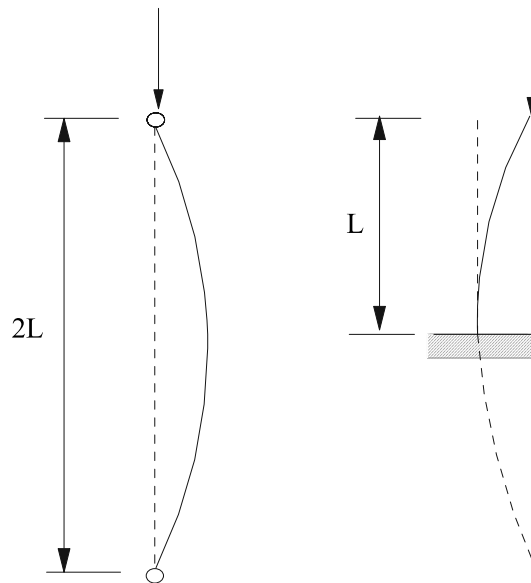
Avec  $A = f$  la flèche maximale à "mi-travée"



**Fig.11.3**

### 11.3.1 Longueur effective: (condition de fixation des bouts de la barre)

La force critique d'une barre dépend des modes de fixation de ses extrémités. Ces modes influent sur la forme de flambement. Ainsi une barre de longueur  $L$  encastrée à une extrémité et libre à l'autre, se flambe d'une façon analogue à celle de la moitié d'une barre articulée aux extrémités de longueur  $2L$ .



**Fig. 11.4**

On écrit alors l'équation d'Euler sous la forme:

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{L_{\text{eff}}^2} \quad (11-17)$$

Avec  $L_{\text{eff}} = \mu L$ , la longueur effective ou longueur libre de flambement.

$\mu$  est un coefficient numérique dépendant des conditions aux limites de la barre.

Plus généralement, on peut calculer la longueur libre de flambement pour diverses conditions aux limites comme le montre la Fig. 11.5:

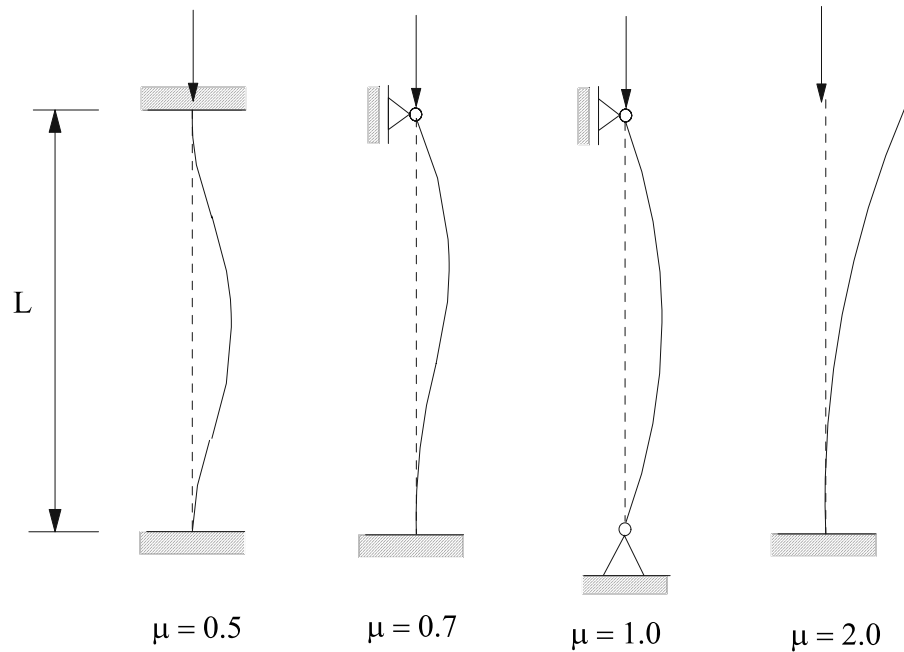


Fig. 11.5

### 11.3.2 Contrainte critique de flambement

La valeur de la contrainte critique de flambement est donnée par la formule:

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{S} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{SL_{eff}^2} \quad (11-18)$$

$$= \frac{\pi^2 Ei^2}{L_{eff}^2} \quad (11-19)$$

Avec  $i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{S}}$  le plus petit rayon de giration de la section S

En définissant l'élanement  $\lambda = \frac{L_{eff}}{i_{min}}$  de la barre, l'équation (11-19)

devient:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (11-20)$$

Puisque la contrainte critique  $\sigma_{cr}$  ne doit pas dépasser la limite de proportionnalité  $\sigma_{pr}$  du matériau de la barre, on peut donc déterminer un élanement limite  $\lambda_{lim}$  au-dessous de laquelle on n'est plus autorisé de se servir de la formule ci-dessus :

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_{pr} \quad (11-21)$$

$$\Rightarrow \lambda_{lim} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{pr}}} \quad (11-22)$$

Ainsi pour l'acier,  $\lambda_{lim} = 100$ ; pour la fonte  $\lambda_{lim} = 80$  et pour le bois  $\lambda_{lim} = 70$ .

Le phénomène de flambement est observé aussi au-delà du domaine élastique. Dans ce cas, la valeur de la contrainte critique est calculée d'après les données expérimentales de F. Yassinski. Pour différents matériaux elle est donnée par la formule empirique suivante:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda + c\lambda^2 \quad (11-23)$$

Les valeurs de a, b et c sont données pour certains matériaux:

	$\lambda_{lim}$	a	b	c
Acier doux	100	3100	11.4	0
Bois (pin)	70	293	1.94	0
Fonte	80	7760	120	0.53

La formule de Yassinski est appliquée quand  $\sigma_{cr}$  est plus petite que  $\sigma_{ec}$  (limite d'écoulement) pour les matériaux ductiles et plus petite que la limite de résistance pour les matériaux fragiles.

Ainsi pour un matériau ductile la courbe  $\sigma_{cr} = f(\lambda)$  est caractérisée par 3 phases distinctes (Fig. 11.6): Un palier horizontal correspondant à  $\sigma_{cr} = \sigma_{ec}$ , une droite oblique correspondant aux contraintes post-élastiques et l'hyperbole d'Euler qui correspond au domaine élastique avec  $\lambda > \lambda_{lim}$ .

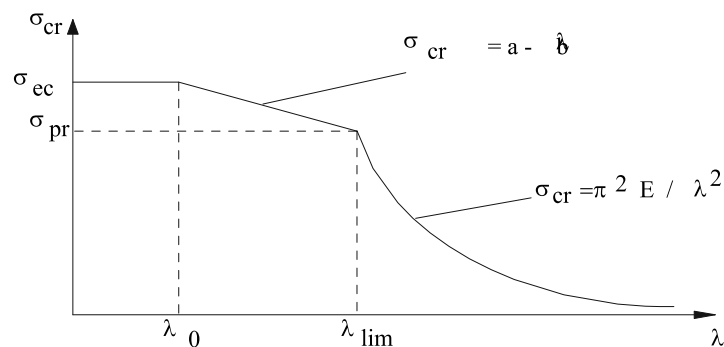


Fig. 11.6

#### 11.4 CALCUL A LA STABILITE:

La vérification de la stabilité des barres comprimées est ramenée à remplir la condition suivante:

$$\sigma_{cr} \leq [\sigma]_s \quad (11-24)$$

$[\sigma]_s$ : contrainte admissible de stabilité et égale à:

$$[\sigma]_s = \frac{\sigma_{cr}}{n_s} \quad (11-25)$$

$n_s$ : le coefficient de stabilité est pris toujours supérieur au coefficient de sécurité:

Acier 1.8 à 3

Fonte 5 à 5.5

Bois 2.8 à 3.2

Dans ces intervalles, on adopte des coefficients de stabilité plus grands pour des barres plus flexibles.

Pour faire disparaître explicitement l'aspect géométrique contenu dans l'expression de la contrainte admissible de stabilité cette méthode utilise la contrainte admissible de compression  $[\sigma_-]$  minorée par un coefficient  $\varphi$  dont la valeur est défini à partir :

$$\frac{[\sigma]_s}{[\sigma_-]} = \frac{\sigma_{cr}}{n_s} \times \frac{n}{\sigma_d} \quad (11-26)$$

$n$  : coefficient de sécurité

$\sigma_d$  : contrainte dangereuse =  $\sigma_{ec}$  matériaux ductiles

$$[\sigma]_s = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_d} \frac{n}{n_s} [\sigma_-] \quad (11-27)$$

$$[\sigma]_s = \varphi [\sigma_-] \quad (11-28)$$

$$\text{et } \varphi = \frac{n}{n_s} \times \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_d} \quad (11-29)$$

$\varphi$  est le coefficient de réduction de la contrainte admissible en compression et est donnée en fonction du matériau et l'élanement  $\lambda$ .

$\lambda$	0	40	60	80	90	100	110	120	130	140
Acier doux	1.00	0.92	0.86	0.75	0.69	0.6	0.52	0.45	0.40	0.36
Bois	1.00	0.87	0.71	0.49	0.38	0.31	0.25	0.22	0.18	0.16

La condition de stabilité s'écrit donc:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma]_s = \varphi[\sigma_-] \quad (11-30)$$

$$\text{ou } \sigma = \frac{N}{S} \leq \varphi[\sigma_-] \quad (11-31)$$

Pour dimensionner à la stabilité une barre comprimée, on utilise la condition de stabilité sous la forme ci-dessous:

$$\sigma = \frac{F}{\varphi S} \leq [\sigma_-] \quad (11-32)$$

Comme  $\varphi$  est inconnu on utilise la méthode d'itérations successives avec une valeur initiale  $\varphi_1 = 0.5$  à 1. On détermine l'aire de la section  $S$  et les autres caractéristiques géométriques,  $I_{\min}$ ,  $i_{\min}$  et  $\lambda$ . On calcul la valeur effective  $\varphi_1'$  et on la compare avec  $\varphi_1$ . Si la différence est sensible, il faut reprendre alors le calcul avec une valeur intermédiaire entre  $\varphi_1$  et  $\varphi_1'$ :

$$\text{Soit : } \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} \quad (11.33)$$

Après le second essai on détermine  $\varphi_2'$ . Si l'écart est toujours sensible on reprend le calcul avec:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2} \quad (11.34)$$

Et ainsi de suite. Généralement on converge après deux ou trois itérations.

### 11.5 LA FORME RATIONNELLE POUR LES SECTIONS TRANSVERSALES DES BARRES COMPRIMEES.

Pour les éléments élancés ( $\lambda \geq \lambda_{lim}$ ), la condition de stabilité est plus sévère que celle de la résistance. Dans ce cas, la contrainte critique dépend uniquement du module d'élasticité  $E$ . Par conséquent, il est évident qu'il ne sert à rien d'employer un acier à haute résistance puisque  $E$  est pratiquement le même que celui de l'acier doux.

Pour une aire donnée, si la valeur du petit rayon de giration  $i_{\min}$  est maximale, la forme de la section est dite rationnelle. Le rapport des contraintes critiques de certaines sections par rapport à une section circulaire pleine visualisent la rationalité de leurs formes :



Formes		$P_{cr} / P_{cr \text{ cercle}}$
section en tube	$d_{int} / D_{ext} = 0.7 \text{ à } 0.8$	18.00 à 12.49
section à cornière		3.12 à 1.12
section en U		2.10 à 1.05
section à double T ou I		2.10 à 0.91
section carrée		1.04
section circulaire		1.
section rectangulaire	$h = 2b$	0.520

Le tableau montre que les formes les plus rationnelles sont les sections en tubes ou les sections en caisson à parois minces ayant les moments d'inerties principaux identiques. Les sections rectangulaires pleines sont moins rationnelles.

## 11.6 APPLICATIONS

### Exemple (1)

Déterminer la charge admissible  $P$  et le coefficient de stabilité  $n_{st}$  de la barre comprimée sachant que  $L = 2.0 \text{ m}$ ,  $d = 10 \text{ cm}$ ,  $[\sigma] = 10 \text{ N/mm}^2$ ,  $\lambda_{lim} = 70$  et  $E = 10^4 \text{ N/mm}^2$ .

### Solution

Pour une section circulaire :

$$i_{min} = \frac{d}{4} = \frac{100}{4} = 25 \text{ mm}$$

L'élanement de la barre :

$$\lambda = \frac{\mu L}{i_{min}} = \frac{1 \times 2000}{25} = 80 > \lambda_{lim}$$

D'après le tableau, on a pour le bois  $\lambda = 80 \rightarrow \varphi = 0.49$

Par conséquent:

$$[\sigma]_s = \varphi [\sigma] = 0.49 \times 10 = 4.9 \text{ N/mm}^2$$

Et

$$\text{La force admissible : } P = [\sigma]_s S = 4.9 \times \pi \frac{100^2}{4} = 385 \text{ N}$$

Puisque  $\lambda > \lambda_{lim}$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} = \frac{\pi^2 \times 1 \times 10^4}{80^2} = 15.4 \text{ N/mm}^2$$

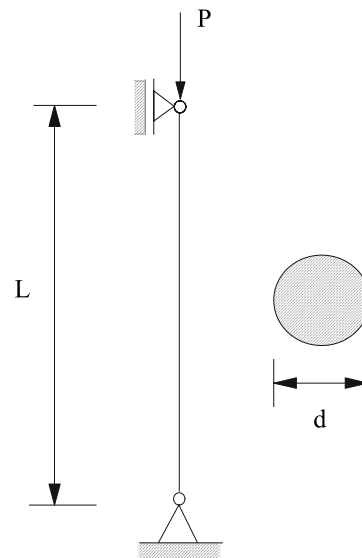


Fig. 11.6

$$n_s = \frac{\sigma_{cr}}{[\sigma]_s} = \frac{15.4}{4.9} = 3.14$$

**Exemple (2)**

Dimensionner, d'après le critère de stabilité, la barre comprimée ci-contre :

Sachant que  $n_{st} = 2$ ,  $E = 2.10^5 \text{ N/mm}^2$

et  $\sigma_{pr} = 200 \text{ N/mm}^2$

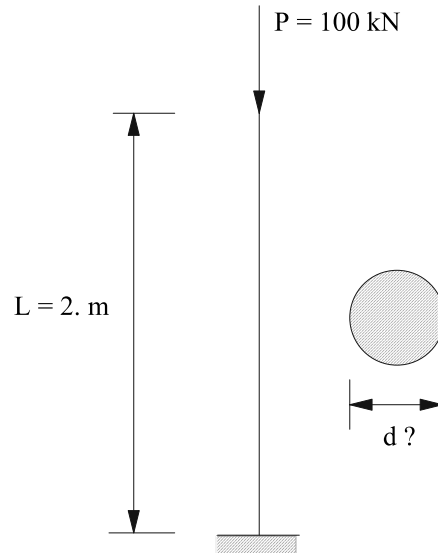
**Solution**

-On suppose que  $\lambda > \lambda_{lim}$

$$P \leq \frac{P_{cr}}{n_{st}} \Rightarrow P_{cr} = n_{st}P = \frac{\pi^2 EI}{4L^2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{4L^2 n_{st} P}{\pi^2 E} = \frac{4(2000)^2 2 \times 100 \times 10^3}{\pi^2 \times 2 \times 10^5} \\ = 16.2 \times 10^5 \text{ mm}^4$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \Rightarrow d = 75.8 \text{ mm}$$

**Fig. 11.8****Exemple (3)**

Dimensionner, d'après le critère de stabilité, la barre comprimée ci-contre, sachant que  $E = 1.0 \times 10^4 \text{ N/mm}^2$ ,  $P = 100 \text{ kN}$ ,  $[\sigma_-] = 70 \text{ N/mm}^2$ , et  $L = 2.0 \text{ m}$ .

**Solution**

Comme le coefficient de stabilité n'est pas donné explicitement, on utilisera la méthode itérative en prenant une valeur initiale de  $\varphi = 1$  qui correspond au critère de résistance.

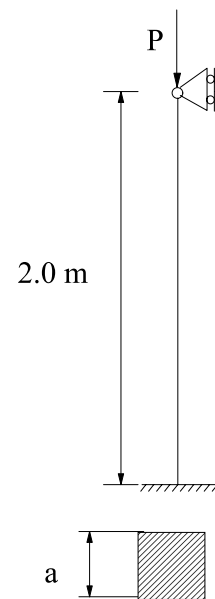
Pour

$$\frac{P}{S} \leq [\sigma_-] \Rightarrow S \geq \frac{P}{[\sigma_-]}$$

$$\Rightarrow b \geq \sqrt{\frac{P}{[\sigma_-]}} = \sqrt{\frac{100 \times 10^3}{70}} = 37.8 \text{ mm}$$

On calcule les caractéristiques géométriques et l'élanement réelle:

$$i = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{37.8}{\sqrt{12}} = 10.91 \Rightarrow \lambda = \frac{2000 \times 0.7}{10.91} = 128.3$$

**Fig. 11.9**

Pour  $\lambda = 128.3$  on détermine  $\varphi$ , en interpolant linéairement entre  $\lambda = 120$  et 130.

$$\varphi = 0.22 + \frac{(0.18 - 0.22)}{10}(128.3 - 120) = 0.187$$

On prend donc une nouvelle valeur de  $\varphi$  telle que

$$\varphi = \frac{1 + 0.187}{2} \approx 0.6$$

$$\text{Pour } \varphi = 0.6 \Rightarrow b \geq \sqrt{\frac{P}{[\sigma_-]}} = \sqrt{\frac{100 \times 10^3}{0.6 \times 70}} = 48.8$$

$$i = \frac{48.8}{\sqrt{12}} = 14.08 \Rightarrow \lambda = \frac{2000 \times 0.7}{14.08} = 99.4 \Rightarrow \varphi = 0.31$$

On remarque que la valeur de  $\varphi$  a sensiblement changée, on doit alors prendre

$$\varphi = \frac{0.6 + 0.31}{2} = 0.455 \Rightarrow b \geq \sqrt{\frac{P}{[\sigma_-]}} = \sqrt{\frac{100 \times 10^3}{0.455 \times 70}} = 56.0$$

$$i = \frac{56}{\sqrt{12}} = 16.17 \Rightarrow \lambda = \frac{2000 \times 0.7}{16.17} = 86.6 \Rightarrow \varphi = 0.42$$

On fait une autre itération avec

$$\varphi = \frac{0.445 + 0.42}{2} = 0.44 \Rightarrow b \geq \sqrt{\frac{P}{[\sigma_-]}} = \sqrt{\frac{100 \times 10^3}{0.44 \times 70}} = 57.0$$

$$i = \frac{57}{\sqrt{12}} = 16.45 \Rightarrow \lambda = \frac{2000 \times 0.7}{16.45} = 85.1 \Rightarrow \varphi = 0.43$$

On fait une dernière itération avec:

$$\varphi = \frac{0.44 + 0.43}{2} = 0.435 \Rightarrow b \geq \sqrt{\frac{P}{[\sigma_-]}} = \sqrt{\frac{100 \times 10^3}{0.435 \times 70}} = 57.3$$

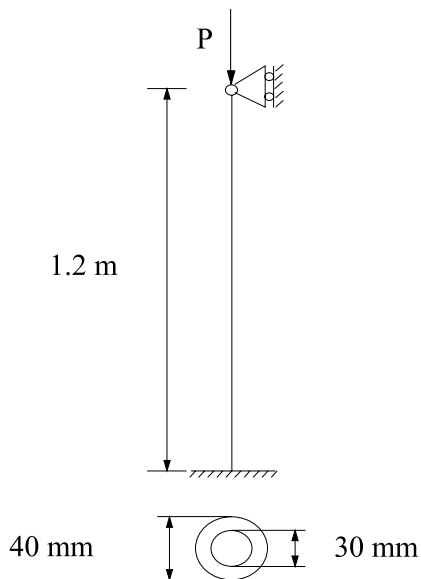
Donc on prend  $b = 58.0$  mm

### EXERCICES / chapitre 11

**11.1** Calculer la force critique  $P_{cr}$  et la contrainte critique  $\sigma_{cr}$  d'un tube en dural (Fig. E11.1) sachant que:

$$\sigma_{pr} = 180 \text{ N/mm}^2, \text{ et } E = 0.7 \times 10^5 \text{ N/mm}^2.$$

$$\checkmark \quad P_{cr} = 85.3 \text{ kN} \quad \text{et} \\ \sigma_{cr} = 155 \text{ N/mm}^2$$



**Fig. E11.1**

**11.2** Un poteau en acier doux de longueur  $L = 2.5 \text{ m}$  a une section rectangulaire de 80 mm de largeur et de 120 mm de hauteur. Il est articulé à ses extrémités et supporte une force axiale  $P$ . Etant données:

$$[\sigma] = 160 \text{ N/mm}^2, E = 2. \times 10^5 \text{ N/mm}^2 \text{ et} \\ \lambda_{lim} = 100.$$

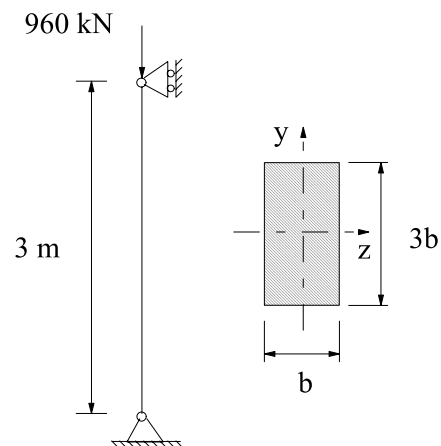
Déterminer la force  $P$  en prenant  $n_{st} = 2$ .

$$\checkmark \quad P = 812.64 \text{ kN}$$

**11.3** Une barre en acier doux est comprimée par une force  $P = 960 \text{ kN}$ .

Déterminer la dimension  $b$  de la section droite de la barre (Fig. E11.3). On donne:

$$[\sigma] = 160 \text{ N/mm}^2, E = 2. \times 10^5 \text{ N/mm}^2,$$



**Fig. E11.3**

$$\lambda_{lim} = 100 \text{ et } n_{st} = 2.$$

$$\checkmark \quad b = 76.6 \text{ mm}$$

**11.4** Vérifier la stabilité des barres comprimées (Fig. E11.4) et calculer en pourcentage leur surtension ou sous-tension. On néglige les éventuelles déformations de torsion et on prendra les contraintes admissibles pour les colonnes (a), (b) et (c)  $200 \text{ N/mm}^2$ ,  $160 \text{ N/mm}^2$  et  $10 \text{ N/mm}^2$  respectivement.

(Profile en I:  $S = 2540 \text{ mm}^2$ ,  $I_{min} = 114 \times 10^4 \text{ mm}^4$ )

$$\checkmark \quad \text{Sous-tension } 4.8\%, \\ \text{surtension } 33\%, \text{ surtension } 2.4\%$$

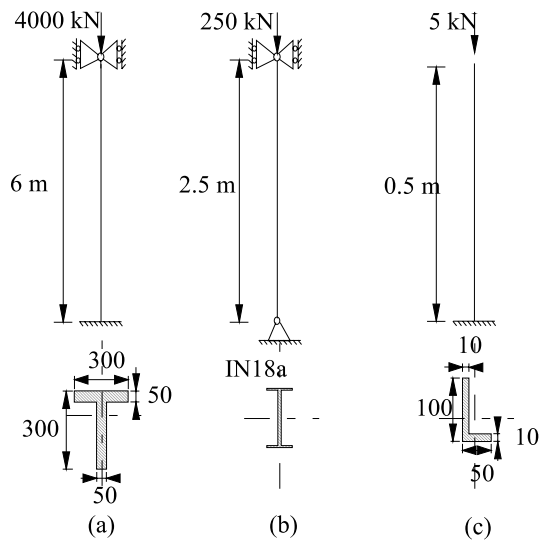


Fig. E11.4

**11.5** Calculer le rapport de dimension  $b/a$  de la section de la colonne de la Fig. E11.5 d'après la condition d'égale stabilité par rapport aux axes principaux.

✓  $b/a = 2.86$

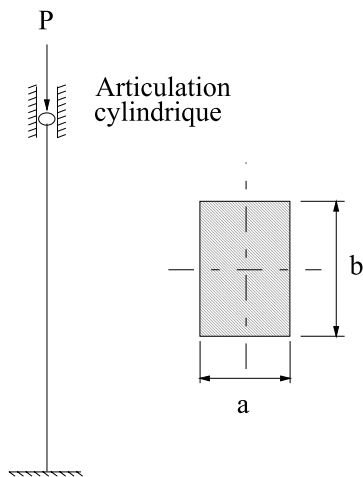


Fig. E11.5

**11.6** Calculer la longueur  $L$  pour laquelle un poteau en acier comprimé, de section circulaire de diamètre  $d$ , articulé à ses extrémités, devient instable. On donne :

$\sigma_{pr} = 190 \text{ N/mm}^2, \quad \sigma_{ec} = 240 \text{ N/mm}^2,$   
 $E = 2. \times 10^5 \text{ N/mm}^2,$   
 $d = 10 \text{ mm}$  et  $P = 10 \text{ kN}$ .

✓  $319 \text{ mm}$

**11.7** Dimensionner les colonnes comprimées de la Fig. E11.7 d'après la condition de stabilité. On prendra pour l'acier  $[\sigma] = 160 \text{ N/mm}^2$ , et pour le bois  $[\sigma] = 10 \text{ N/mm}^2$ .

✓  $b = 100 \text{ mm}, N24 (S = 3480 \text{ mm}^2, i_{min} = 23.7 \text{ mm})$  ou des valeurs proches par défaut.

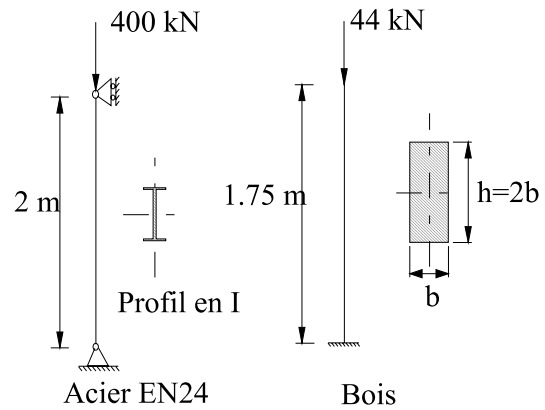


Fig. E11.7