

# *Chapitre 1*

## ***INTRODUCTION ET GENERALITES***

### **1.1 DEFINITIONS ET HYPOTHESES**

*La résistance des matériaux ou la mécanique des matériaux* est une branche de la mécanique appliquée servant à étudier le comportement des corps solides sous l'action des différents types de charges. La résistance des matériaux traite non seulement les méthodes d'ingénieurs employées pour le calcul de la capacité des structures et de ses éléments à supporter les charges qui leurs sont appliquées sans se détruire, ou se déformer appréciablement, mais aussi à présenter les critères de base pour la conception des structures (forme, dimensions,...) et l'utilisation des matériaux dans les meilleurs conditions de sécurité et d'économie.

La résistance des matériaux est basée sur les résultats théoriques de la mécanique et les propriétés des matériaux qui ne peuvent être disponibles qu'à travers les résultats des travaux expérimentaux comme le témoigne l'histoire du développement de la résistance des matériaux qui constitue une combinaison fascinante de la théorie et l'expérience [1].

Les limites de la résistance des matériaux sont celles imposées par ses hypothèses mêmes. Les disciplines connexes telles que la théorie d'élasticité, de la plasticité ou la méthode des éléments finis se libèrent de certaines de ces contraintes.

Les principales hypothèses de la résistance des matériaux sont les suivantes:

*L'homogénéité*, l'isotropie et la continuité du matériau: On suppose que le matériau possède les mêmes propriétés élastiques en tous les points du corps, dans toutes les directions en un point quelconque du corps, et que le matériau est assimilé à un milieu continu.

*L'élasticité et la linéarité du matériau*: On suppose admet qu'en chaque point contraintes et déformations sont proportionnelles et qu'après déformation, l'élément revient à son état initiale.

*La petitesse des déformations:* les déformations dues aux charges sont négligeables par rapport aux dimensions des éléments et la configuration géométrique reste inchangée.

*Hypothèse des sections planes (hypothèse de Navier-Bernoulli):* Les sections droites restent planes et normales à la fibre moyenne au cours de la déformation.

*Hypothèse de Saint Venant:* Tous les efforts qui interviennent dans la théorie peuvent être schématisés par leur torseur résultant.

Ces hypothèses simplificatrices conduisent à des solutions approchées qui permettent en général une bonne approximation du comportement des structures soumises à différents types de charges.

Les notions de la résistance des matériaux étudiées dans cet ouvrage et les relations entre elles sont schématisées dans la Fig. 1.1. L'action extérieure est caractérisée par les différents types de forces connues agissant sur une structure ou un élément de structure défini par ses caractéristiques géométriques et mécaniques. Pour une structure isostatique, les efforts internes sont déterminés directement en utilisant les équations de la statique. Par contre pour une structure hyperstatique, il est nécessaire de faire intervenir les déformations de la structure pour déterminer les réactions. L'effort interne qui agit au niveau d'une section d'un élément de structure peut-être décomposé en effort normal de traction ou de compression, moment fléchissant, moment de torsion, effort tranchant ou une combinaison de ces sollicitations. A partir de ces efforts internes, nous pouvons obtenir des informations sur la répartition des contraintes et des déformations dans la section droite. Les valeurs extrêmes de ces contraintes et déformations sont les mesures de base des critères de résistance, de rigidité ou de stabilité pour vérifier ou dimensionner les éléments des structures.

## 1.2 UNITES

Les unités de mesure utilisées sont principalement celles du système d'unités international (SI); pour des raisons de commodité le système d'unités technique (MKS) est parfois utilisé

Unité	SI	MKS
Longueur (le mètre)	m	m
Masse (le kilogramme)	kg	kgf = 10 N
Temps (la seconde)	s	s
Force (le Newton)	N, kN	t = 10 <sup>3</sup> kgf = 10 <sup>4</sup> N
Contrainte	N/mm <sup>2</sup>	1 bar = kgf/cm <sup>2</sup> = 0.1 N/mm <sup>2</sup>
Travail (Joule)	J = N.m	kgf .m = 10 J

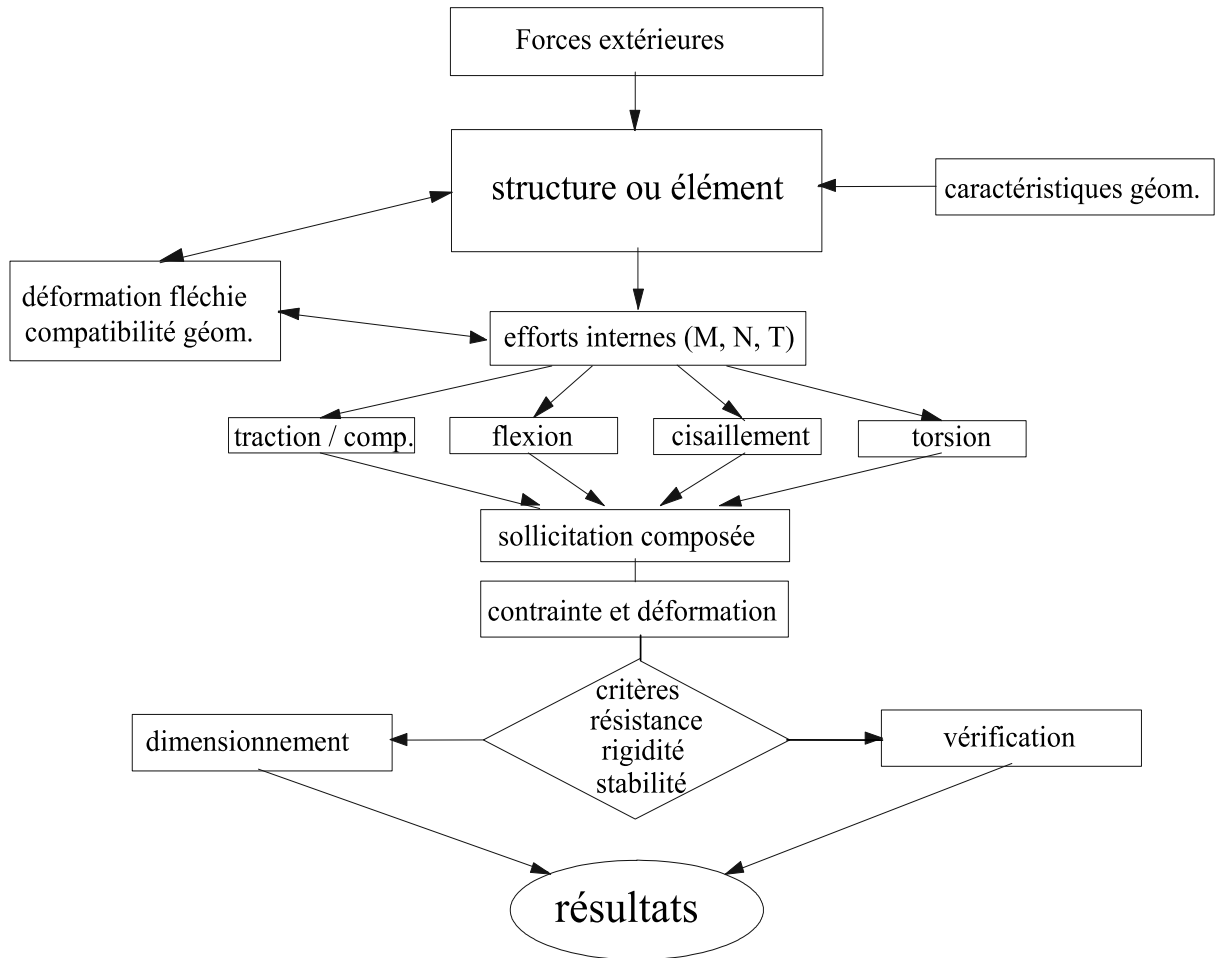


Fig. 1.1

### 1.3 CONVENTION DE SIGNE DES AXES

Généralement on utilise le système Cartésien ou rectangulaire pour toutes les structures. Cependant, pour les structures en arc, le système polaire s'avère plus pratique. Le premier ayant les axes  $OX$ ,  $OY$  et  $OZ$  mutuellement perpendiculaire. Les sens positifs de ces axes obéissent à la règle de la main droite. Comme indiqué ci-dessous (Fig. 1.2), on choisit les sens positifs de deux axes  $X$  et  $Y$  par exemple, le sens positif de l'axe  $Z$  est suivant la direction d'un vis tournant de l'axe  $X$  vers l'axe  $Y$ .

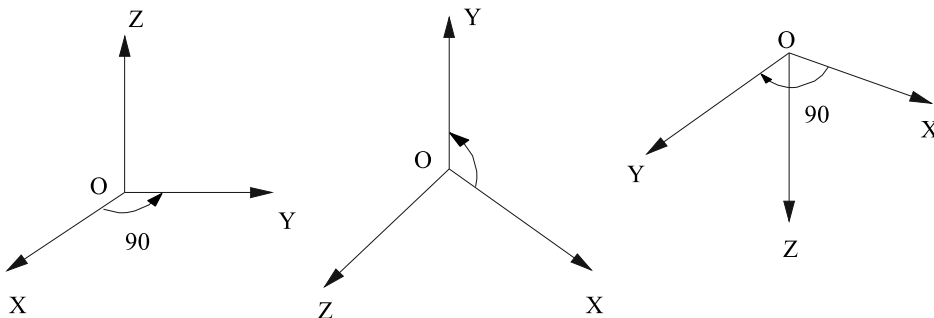


Fig. 1.2

### 1.4 REACTION D'APPUI (Efforts de liaison)

Une structure est reliée au monde extérieur par un certain nombre de liaisons. Une liaison impose des conditions cinématiques en un point. Pour maintenir ces liaisons, il faut exercer des efforts de liaison qui sont des inconnues du problème. Les liaisons dans le plan sont de 3 sortes:

#### 1.4.1 Appui simple

Ce type d'appui matérialisé par la Fig. 1.3, laisse à la structure toute liberté de pivoter autour de O (extrémité de la poutre) et de se déplacer perpendiculairement à la droite joignant les points de contact. Si on néglige les frottements, la réaction d'appui a la direction de la droite précitée, et introduit une seule inconnue dans l'étude de la poutre.

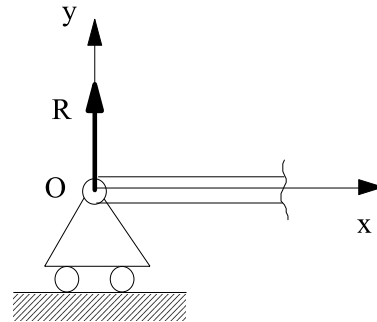


Fig. 1.3

#### 1.4.2 Appui double (articulation)

Matérialisé par une rotule (Fig. 1.4) cet appui autorise les rotations d'une extrémité de la poutre ou d'un des éléments constituant la structure. La direction de la réaction R est inconnue, mais la ligne d'action passe par le centre de l'articulation.

L'articulation introduit 2 inconnues, par exemple les projections sur deux directions du plan moyen.

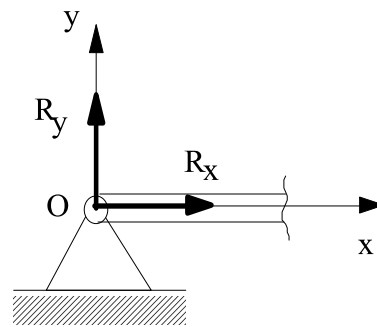


Fig. 1.4

#### 1.4.3 Encastrement

L'encastrement schématisé sur la Fig. 1.5 interdit tout déplacement de la section droite de l'appui. Sa réaction est une force de densité variable répartie sur toute l'étendue de la section. En vertu du principe de Saint Venant, ces forces peuvent être remplacées par leur résultante générale R, et leur moment M rapportés au centre de gravité G. Ce type d'appui introduit donc 3 inconnues, les deux projections de R sur deux axes du plan moyen et l'intensité du moment M qui est perpendiculaire au plan moyen.

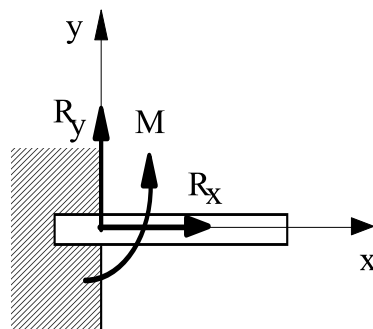
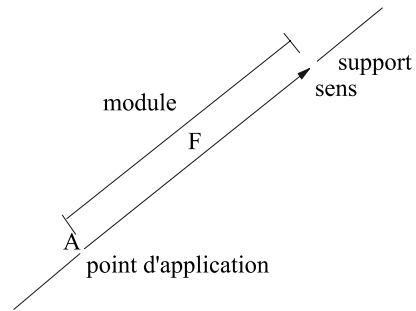


Fig. 1.5

## 1.5 FORCES

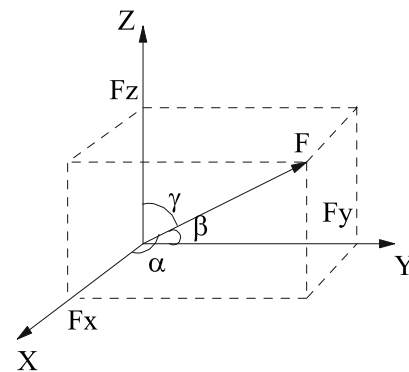
La force est une grandeur dirigée (Fig. 1.6). Elle est donc représentée par un vecteur et définie par:

- Son point d'application
- Sa direction ou support
- Son sens
- Son intensité



**Fig. 1.6**

Dans un repère Cartésien une force  $\vec{F}$  est définie par une intensité  $F$  et des angles  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  que  $\vec{F}$  forme avec les axes  $X$ ,  $Y$  et  $Z$ . Les projections de  $\vec{F}$  suivant ces axes sont les composantes de cette force. Comme le montre la Fig. 1.7,  $F_x = F \cos\alpha$ ,  $F_y = F \cos\beta$  et  $F_z = F \cos\gamma$ . Ces composantes qui déterminent complètement l'intensité et la direction de  $\vec{F}$  sont souvent représentées sous la forme matricielle par:



**Fig. 1.7**

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix}$$

Cette matrice colonne est appelée le vecteur force.

### 1.5.1 Composition des forces

Soient  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$  définies par:

$$\vec{F}_1 = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \end{bmatrix} \quad \vec{F}_2 = \begin{bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \end{bmatrix} \quad \vec{F}_n = \begin{bmatrix} F_{xn} \\ F_{yn} \\ F_{zn} \end{bmatrix}$$

Où  $F_{x1} = F_1 \cos\alpha_1$ ,  $F_{y1} = F_1 \cos\beta_1$ ,  $F_{z1} = F_1 \cos\gamma_1$ ,  $F_{x2} = F_2 \cos\alpha_2$  ... etc.

Le vecteur  $\vec{F}$  résultant est la somme de ces n vecteurs forces:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{z1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \\ F_{z2} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} F_{xn} \\ F_{yn} \\ F_{zn} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} F_{x1} + F_{x2} + \dots + F_{xn} \\ F_{y1} + F_{y2} + \dots + F_{yn} \\ F_{z1} + F_{z2} + \dots + F_{zn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum F_{xi} \\ \sum F_{yi} \\ \sum F_{zi} \end{bmatrix}$$

### 1.5.2 Moment des forces

Le moment de  $F_1$  par rapport à un axe, X par exemple, est la somme des moments de ses composantes par rapport à cet axe.

Si le point d'application de  $F_1$  est défini par  $(x_1, y_1, z_1)$  (Fig. 1.8) on a:

Le moment de  $F_1$  par rapport à l'axe X

$$M_x = F_{z1}y_1 - F_{y1}z_1$$

Le moment de  $F_1$  par rapport à l'axe Y

$$M_y = F_{x1}z_1 - F_{z1}x_1$$

Le moment de  $F_1$  par rapport à l'axe Z

$$M_z = F_{y1}x_1 - F_{x1}y_1$$

Sous sa forme vectorielle le moment  $M_1$  s'écrit:

$$M_1 = \begin{bmatrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{z1}y_1 - F_{y1}z_1 \\ F_{x1}z_1 - F_{z1}x_1 \\ F_{y1}x_1 - F_{x1}y_1 \end{bmatrix}$$

La somme de n moments  $M_1, M_2, \dots, M_n$  est :

$$M = M_1 + M_2 + \dots + M_n = \begin{bmatrix} M_{x1} \\ M_{y1} \\ M_{z1} \end{bmatrix} + \dots = \begin{bmatrix} \sum M_{xi} \\ \sum M_{yi} \\ \sum M_{zi} \end{bmatrix}$$

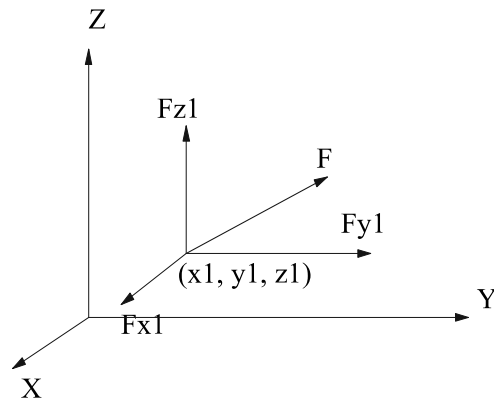


Fig. 1.8

## 1.6 APPLICATIONS

### Exemple 1

Soit un repère orthonormé XOY dans le plan. Déterminer la force résultante et le moment résultant par rapport à O des forces  $F_1$  et  $F_2$ .

#### Solution:

On détermine les composantes de la force résultante:

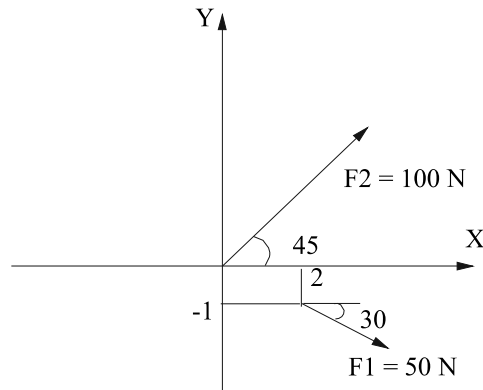


Fig. 1.9

$$F_x = \sum F_{xi} = 100\cos(45) + 50\cos(30)$$

$$F_x = 114. \text{N}$$

$$F_y = \sum F_{yi} = 100\sin(45) - 50\sin(30)$$

$$F_y = 45.7 \text{N}$$

Le moment résultant par rapport à O:

$$M_{/o} = \sum F_{xi} Y_i + F_{yi} X_i$$

$$M_{/o} = 2 \times 50 \sin(30) - 1 \times 50 \cos(30) = 6.7 \text{N.m}$$

### Exemple 2

Quel est le module minimal de  $F_2$  et l'angle correspondant pour que le moment résultant par rapport à O soit nul?

#### Solution:

Le moment résultant par rapport à O :

$$M_{/o} = \sum F_{xi} Y_i + F_{yi} X_i$$

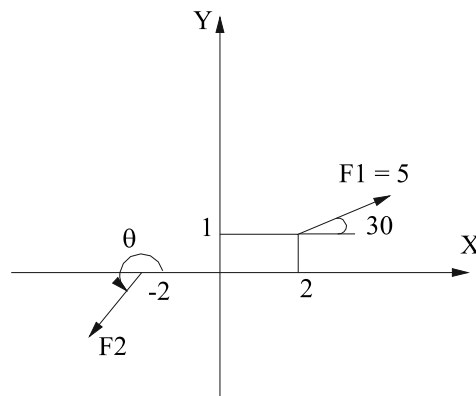


Fig. 1.10

En supposant que le sens positif du moment est le sens trigonométrique, pour  $\theta > \pi$  le moment résultant s'écrit:

$$M_{/o} = 2 \times F_2 \sin \theta - 1 \times 5 \cos 30 + 2 \times 5 \sin 30 = 0$$

$$\Rightarrow F_2 = \frac{5(\cos 30 - 2 \sin 30)}{2 \sin \theta}$$

Pour que le module de  $F_2$  soit minimal, il faut que  $\sin \theta$  soit maximal:

$$\sin \theta = 1 \Rightarrow \theta = \pi/2 + k\pi$$

et comme  $\theta$  est supposé  $> \pi$

$$\Rightarrow \theta = 3\pi/2$$

d'où  $F_2 = 0.33 \text{ N}$



<b>EXERCICES / chapitre 1</b>
-------------------------------

**1.1** Déterminer les composantes  $F_x$  et  $F_y$  de chacune des trois forces  $F_1$ ,  $F_2$ , et  $F_3$ .

Trouver la valeur de la résultante de ces forces et l'angle entre cette résultante et l'axe  $yy'$ .

$$F_1 = 100 \text{ N}, \alpha = 36.86^\circ$$

$$F_2 = 200 \text{ N}, \alpha = -110^\circ$$

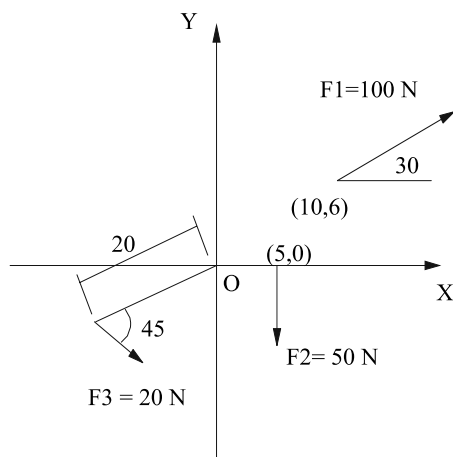
$$F_3 = 300 \text{ N}, \alpha = 125^\circ$$

$$\checkmark 80 \text{ N}, 60 \text{ N}, -68.4 \text{ N}, -187.9$$

$$-172.1 \text{ N}, 245.7 \text{ N}, 199.1 \text{ N}, -36.3^\circ$$

**1.2** Déterminer le module minimal et l'angle correspondant d'une force appliquée au point  $(0,1)$  pour que le torseur des moments par rapport au point O soit nul.

$$\checkmark 13.23 \text{ N}, \theta = \pi \text{ (parallèle à l'axe } ox)$$



**Fig. E1.2**

**1.3** Soit une structure à 3 dimensions soumise au chargement représenté par le torseur force défini dans un repère cartésien, dont l'origine coïncide avec le centre de gravité de la structure, par:

$$F_1 = 10 \text{ t}, \alpha = 120^\circ, \beta = 45^\circ, \theta = 30^\circ,$$

$$A_1 (1,0,0)$$

$$F_2 = 20 \text{ t}, \alpha = -110^\circ, \beta = 45^\circ, \theta = 30^\circ,$$

$$A_2 (0,1,0)$$

$$F_3 = 8 \text{ t}, \alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ, \theta = 90^\circ,$$

$$A_3 (0,0,1)$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta$  étant les angles que  $F_i$  forme respectivement avec les axes  $xx'$ ,  $yy'$ , et  $zz'$ , et  $A_i$  les points d'application des forces.

Déterminer les composantes du vecteur force résultant et moment résultant.

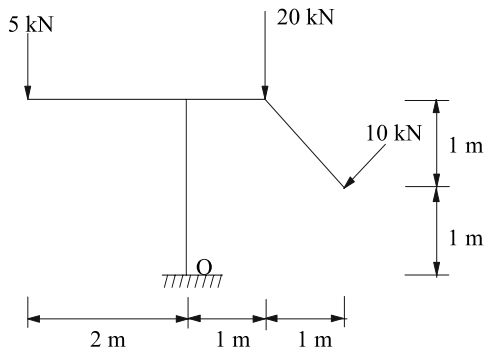
$$\checkmark R = (-7.84, 28.1, 25.96)$$

$$M = (10.4, -4.66, 13.91)$$

**1.4** Déterminer les composantes de la réaction résultante des forces agissant sur le système de poutres rigides de la Fig. E1.4, et le moment résultant de toutes les forces par rapport au point O.

$$\checkmark R = (7.07, 32.07) \text{ kN},$$

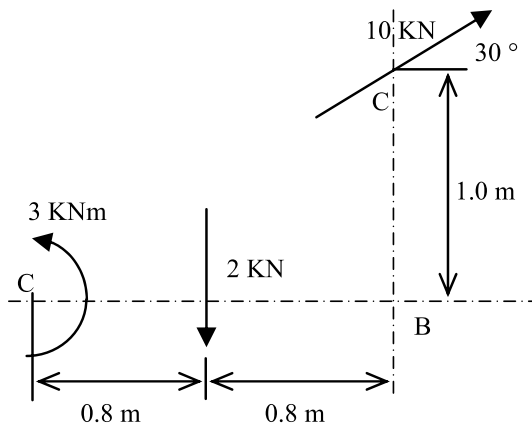
$$M/O = 17.07 \text{ kN.m}$$



**Fig. E1.4**

**1.5** Calculer la résultante des forces et du moment du système de la figure E1.5 et déterminer les points d'intersection de la ligne d'action de la résultante avec AB et CB.

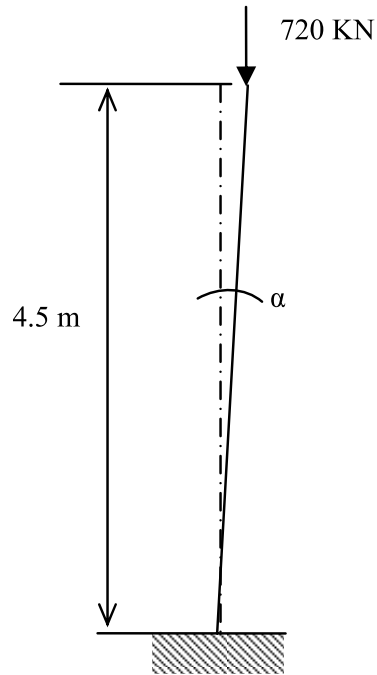
✓  $R = 9.16 \text{ kN}$ ;  $0.47 \text{ m}$  de B sur AB et  $1.35 \text{ m}$  de B sur CB



**Fig.E1.5**

**1.6** Calculer le moment additionnel à la base d'un poteau de 4.5 m de hauteur, que provoque une déviation  $\alpha$  de  $2^\circ$ .

✓  $113.07 \text{ kNm}$



**Fig.E1.6**